Kapitola 1: Měření

Fyzika ... popisuje fyzický svět (matematika je jazyk, kterým fyzika mluví)
Psychologie ... popisuje duševní svět (psyché = duše, logos = slovo, psychologie = slovo o duši)
Teologie ... popisuje duchovní svět (theos = bůh; teologie = slovo o bohu)

předností fyziky ... odpovídá na otázku „JAK?"
slabina fyziky ... neodpovídá na otázku „PROČ?" (plyne ze studentů (ať se plejí oni) různé otázky JAK, PROČ)

Fyzika popisuje svět pomocí tzv. fyzikálních veličin:

označení veličiny	veličina	název jednotky	označení jednotky
l (= length)	délka	metr	m
t (= time)	čas	sekunda	s
m (= mass)	hmotnost	kilogram	kg

pozor, kolize v označení
m – označení jednotky metr
– označení veličiny hmotnost

Předpona před jednotkou umožňuje zápis:

1 Tm = 1 terametr	$= 10^{12}$ m	=	1 000 000 000 000 m
1 Gm = 1 gigametr	$= 10^{9}$ m	=	1 000 000 000 m
1 Mm = 1 megametr	$= 10^{6}$ m	=	1 000 000 m
1 km = 1 kilometr	$= 10^{3}$ m	=	1 000 m
1 hm = 1 hektometr	$= 10^{2}$ m	=	100 m
1 dam = 1 dekametr	$= 10^{1}$ m	=	10 m
1 dm = 1 decimetr	$= 10^{-1}$ m	=	0,1 m
1 cm = 1 centimetr	$= 10^{-2}$ m	=	0,01 m
1 mm = 1 milimetr	$= 10^{-3}$ m	=	0,001 m
1 μm = 1 mikrometr	$= 10^{-6}$ m	=	0,000 001 m
1 nm = 1 nanometr	$= 10^{-9}$ m	=	0,000 000 001 m
1 pm = 1 pikometr	$= 10^{-12}$ m	=	0,000 000 000 001 m

Kapitola 2: Přímočarý pohyb

1977 ... Kitty O'Neilová vytvořila rekord v závodech dragsterů:
za 3,72 s dosáhla rychlosti 628,85 km/h

1958 ... Eli Beeding vytvořil rekord při jízdě na saních s raketovým pohonem:
za 0,04 s dosáhl rychlosti 116 km/h

Který z těchto výkonů přinesl jezdci větší vzrušení nebo strach? Máme srovnávat dosaženou rychlost, dobu jízdy nebo nějakou jinou veličinu?

2.1. Pohyb

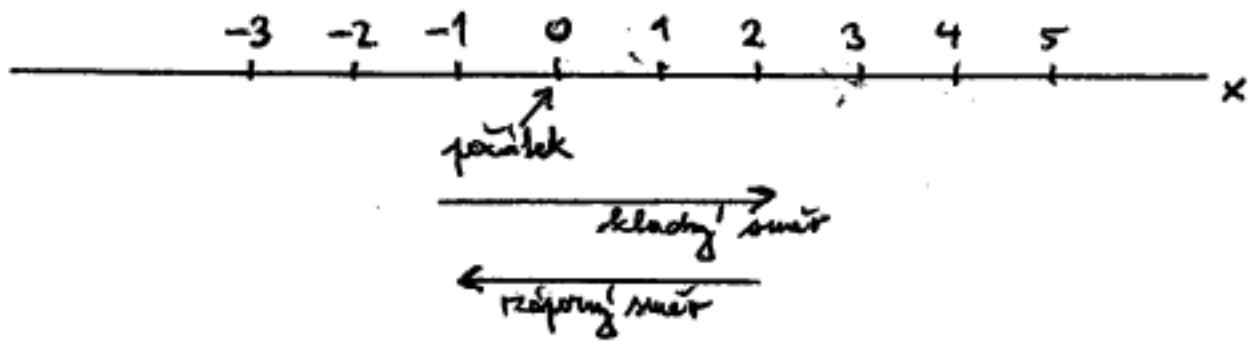
Kinematika ... ta část fyziky, která se zabývá popisem pohybu těles

Zatím se omezíme jen na přímočarý pohyb = pohyb tělesa po přímce, ať už svislé (např. pád kamene), nebo vodorovné (jízda automobilu po přímé dálnici).

Pokud se všechny části tělesa pohybují stejnou rychlostí a stejným směrem, nahradíme těleso tzv. hmotným bodem, tj. uvažujeme jeho hmotnost, ale zanedbáme jeho rozměry.

2.2. Poloha a posunutí

Poloha hmotného bodu ... jeho souřadnice vzhledem k určitému vztažnému bodu (tím je nejčastěji počátek souřadnicové osy)



Posunutí ... změna polohy z bodu o souřadnici x_1 do bodu o souřadnici x_2 (značíme Δx). Znak Δ bude většinou znamenat změnu dané veličiny.

$$\boxed{\Delta x = x_2 - x_1} \qquad (2.1)$$

Posunutí může být i záporné, pokud se odehrálo v záporném směru osy x

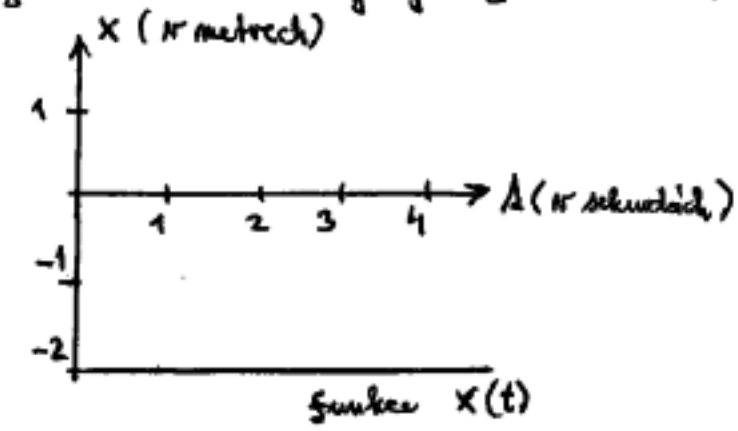
Například posune-li hmotný bod z polohy $x_1 = 2$ do polohy $x_2 = -3$, posunutí $\Delta x = -3 - 2 = -5$

Kontrola 1: Tři různá posunutí jsou dána následujícími počátečními a koncovými polohami na ose x: a) −3 m, +5 m
b) −3 m, −7 m
c) 7 m, −3 m. Která z nich jsou záporná?

2.3. Průměrná rychlost

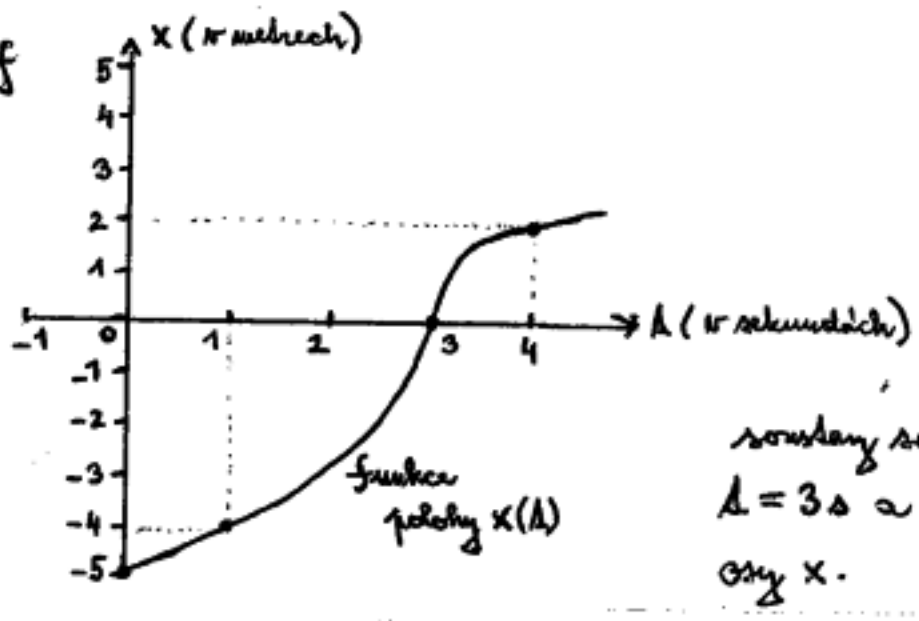
Informace o pohybu lze získat z grafu funkce $x(t)$, která udává polohu bitera v čase t

Například graf

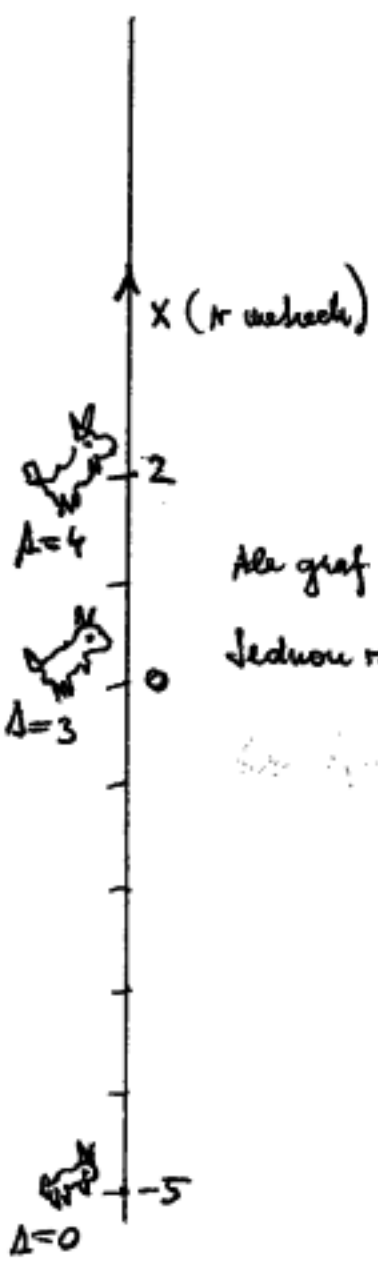


popisuje pohyb králíka (nahradili jsme jej hmotným bodem), který sedí v poloze $x = -2$ m a ani se nehne.

Nebo graf



popisuje pohyb králíka, který v čase $t = 0$ s se nachází v poloze $x = -5$ m, v čase $t = 1$ s se nachází v poloze $x = -4$ m, pak se pohybuje směrem k počátku soustavy souřadnic $x = 0$, kterým prošel v čase $t = 3$ s a pokračoval v běhu v kladném směru osy x.

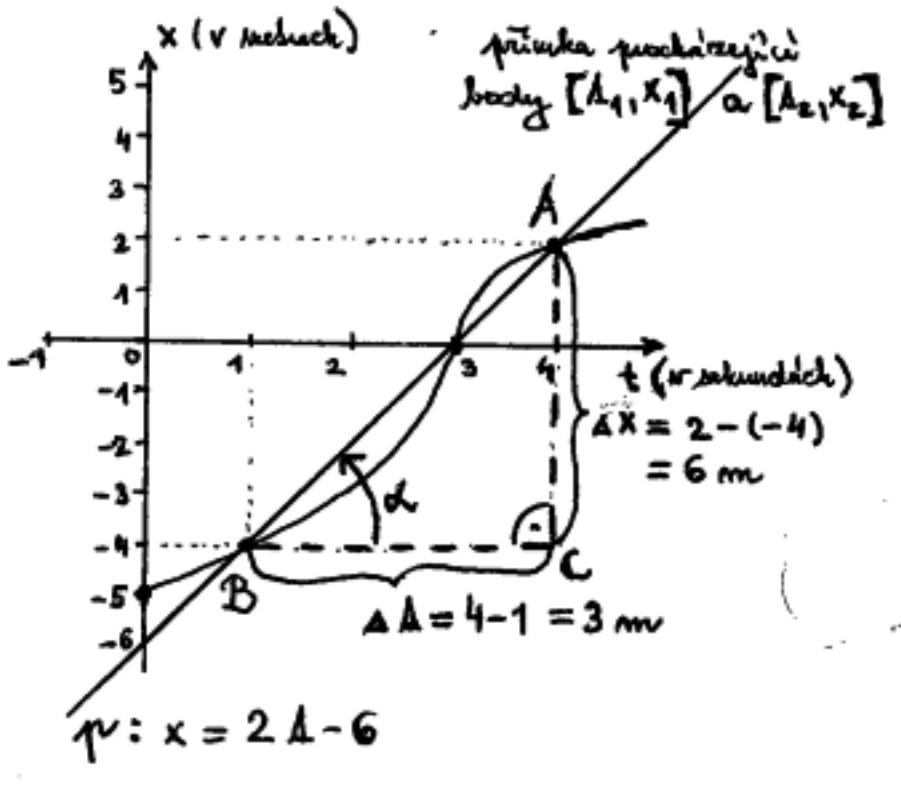


Na obrázku vidíme, jak se králík pohybuje podél osy x.

Ale graf polohy $x(t)$ je zajímavější, protože obsahuje více informací o pohybu králíka. Jednou z nich je průměrná rychlost $\overline{v}$ (pruh označuje průměrnou hodnotu rychlosti)

z anglického velocity = rychlost

$$\boxed{\overline{v} = \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}} \qquad (2.2)$$



Veličina $\overline{v}$ udává, jakou průměrnou rychlostí se králík pohyboval v časovém intervalu od okamžiku t_1 do okamžiku t_2.

Například v časovém intervalu od $t_1 = 1$ s do $t_2 = 4$ s je průměrná rychlost králíka

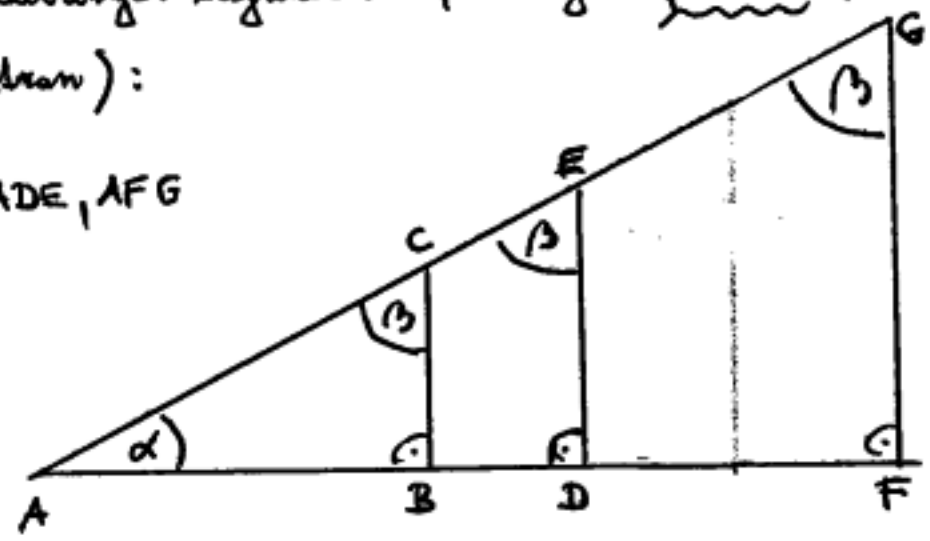
$$\overline{v} = \frac{2 - (-4)}{4 - 1} = \frac{6\ \text{m}}{3\ \text{s}} = 2\ \text{m s}^{-1}$$

= 2 metry za sekundu.

Daná přímka se nazývá sečna (protože „rozsekne" graf funkce $x(t)$ v bodech $[t_1, x_1]$, $[t_2, x_2]$).

Trojúhelník ABC je pravoúhlý (u vrcholu C je pravý úhel = úhel o velikosti 90°). Uvažujme několik pravoúhlých trojúhelníků, které jsou podobné (= mají stejné úhly, liší se pouze velikostí stran):

ABC, ADE, AFG



Odpovídající poměr dvou stran je v každém podobném trojúhelníku stejný:

a) $\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG} = \frac{\text{odvěsna protilehlá úhlu } \alpha}{\text{přepona}}$ ... protože tento poměr závisí pouze na úhlu α a u různých pravoúhlých trojúhelníků je stejný, označujeme jej $\sin \alpha$ (čti: sinus alfa)

b) $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AG} = \frac{\text{odvěsna přilehlá úhlu } \alpha}{\text{přepona}}$ ... protože tento poměr závisí pouze na úhlu α a u různých pravoúhlých trojúhelníků je stejný, označujeme jej $\cos \alpha$ (čti: kosinus alfa)

c) $\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF} = \frac{\text{odvěsna protilehlá úhlu } \alpha}{\text{odvěsna přilehlá úhlu } \alpha}$ .... protože tento poměr závisí pouze na úhlu α a u různých pravoúhlých trojúhelníků je stejný, označujeme jej $\operatorname{tg} \alpha$ (čti: tangens alfa)

Ze základní školy taky víme, že v každém pravoúhlém trojúhelníku platí Pythagorova věta:

$$(\text{odvěsna protilehlá úhlu } \alpha)^2 + (\text{odvěsna přilehlá úhlu } \alpha)^2 = (\text{přepona})^2.$$

Když vydělíme tuto rovnici členem $(\text{přepona})^2$, dostaneme

$$\left(\frac{\text{odvěsna protilehlá úhlu } \alpha}{\text{přepona}}\right)^2 + \left(\frac{\text{odvěsna přilehlá úhlu } \alpha}{\text{přepona}}\right)^2 = 1,$$

což lze pomocí definovaného označení přepsat na $\boxed{(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1}$.

Dále platí

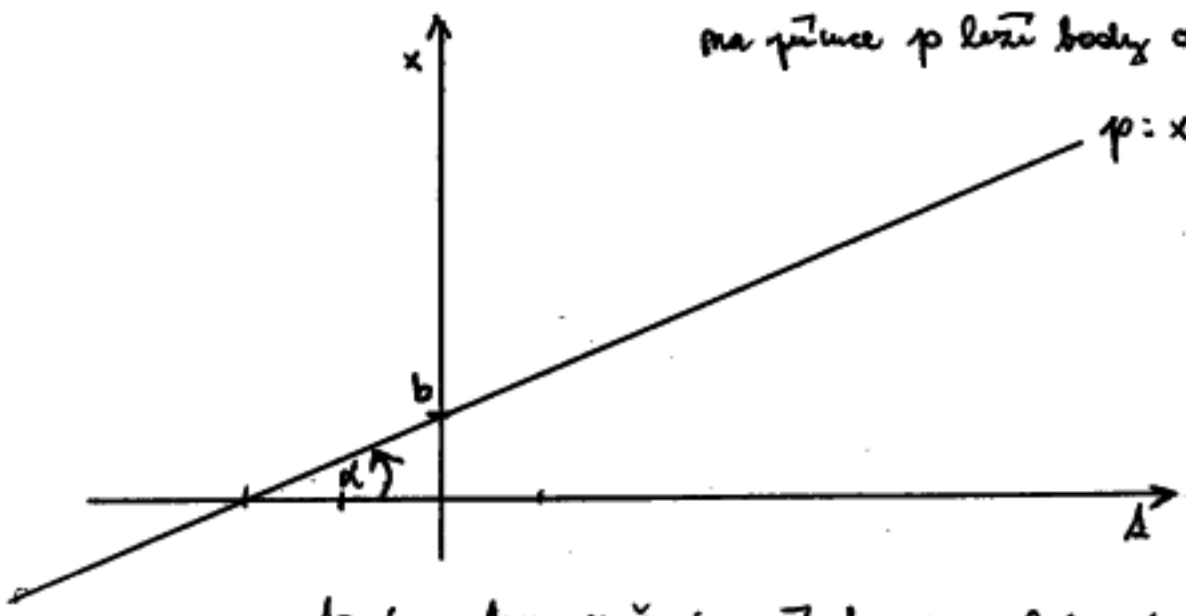
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{odvěsna protilehlá úhlu } \alpha}{\text{odvěsna přilehlá úhlu } \alpha} = \frac{\frac{\text{odvěsna protil. } \alpha}{\text{přepona}}}{\frac{\text{odvěsna přil. } \alpha}{\text{přepona}}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

(Někdy se v pravoúhlém trojúhelníku definuje i tzv. kotangens úhlu α

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{odvěsna přilehlá úhlu } \alpha}{\text{odvěsna protilehlá úhlu } \alpha}.$$

Nebudeme se jím v dalším moc zabývat, protože platí $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$)

Řekněme si teď něco o rovnici přímky ve směrnicovém tvaru:



na přímce p leží body o souřadnicích $[t, x]$

$p: x = a \cdot t + b$

Každou přímku p, která není rovnoběžná s osou x, lze vyjádřit ve tvaru $\underline{\underline{x = a \cdot t + b}}$, kde b ... průsečík přímky p s osou x

a

$a = \operatorname{tg}\alpha$ ... tzv. směrnice přímky p, kde α = úhel, který svírá přímka p s kladným směrem osy t v kladném smyslu (↺)

Říkáme, že úhel α udává směr (nebo také sklon) přímky p vzhledem k soustavě souřadnic.

Vraťme-li se teď k našemu popisu pohybu králíka, vidíme, že (str. MF 3 – spodní obrázek)

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{AC}{BC} = \operatorname{tg}\alpha = \text{směrnice přímky } p$$

(průměrná rychlost pohybu králíka od okamžiku $t_1 = 1\,s$ do okamžiku $t_2 = 4\,s$ je rovna směrnici sečny procházející body $[t_1, x_1]$, $[t_2, x_2]$).

Vidíme tedy, že průměrná rychlost má svůj geometrický význam.

Spojením fyzikálního významu (vzoreček) a matematického významu (směrnice přímky) lze vyvrátit jiný způsob výpočtu průměrné rychlosti: Nakreslíme přímku p, úhloměrem změříme úhel α a vypočteme tg α. Ten správný úhel ovšem naměříme jen tehdy, pokud jsou jednotky na obou souřadných osách stejně dlouhé (bod 1 na obou osách je stejně daleko od počátku).

P.1. Nákladní dodávka jede po přímé silnici stálou rychlostí 86 km/h. Po ujetí 10,4 km náhle dojde palivo. Řidič pokračuje pěšky v původním směru. Po 27 minutách (= 0,45 h) dojde k čerpací stanici, vzdálené od odstavené dodávky 2,4 km. Jaká je průměrná rychlost řidiče od chvíle, kdy vyjel s dodávkou z výchozího místa, až do okamžiku příchodu k čerpací stanici? Řešte výpočtem i graficky.

[Řešení: a) výpočtem: Při práci s vektorovou veličinou $\vec{v}$ musíme vždycky vzít, který směr pohybu je kladný: volíme za kladný směr směr jízdy

Celkovou dráhu neznáme: $10{,}4 + 2{,}4 = 12{,}8$ km.

Celkový čas neznáme: $? + 0{,}45 = ??$ h

Čas jízdy dodávky určíme opět pomocí vzorečku (2.2):

$$86 \text{ km/h} = \frac{10{,}4 \text{ km}}{? \text{ h}} \Rightarrow ? = \frac{10{,}4}{86} = 0{,}121 \text{ h}$$

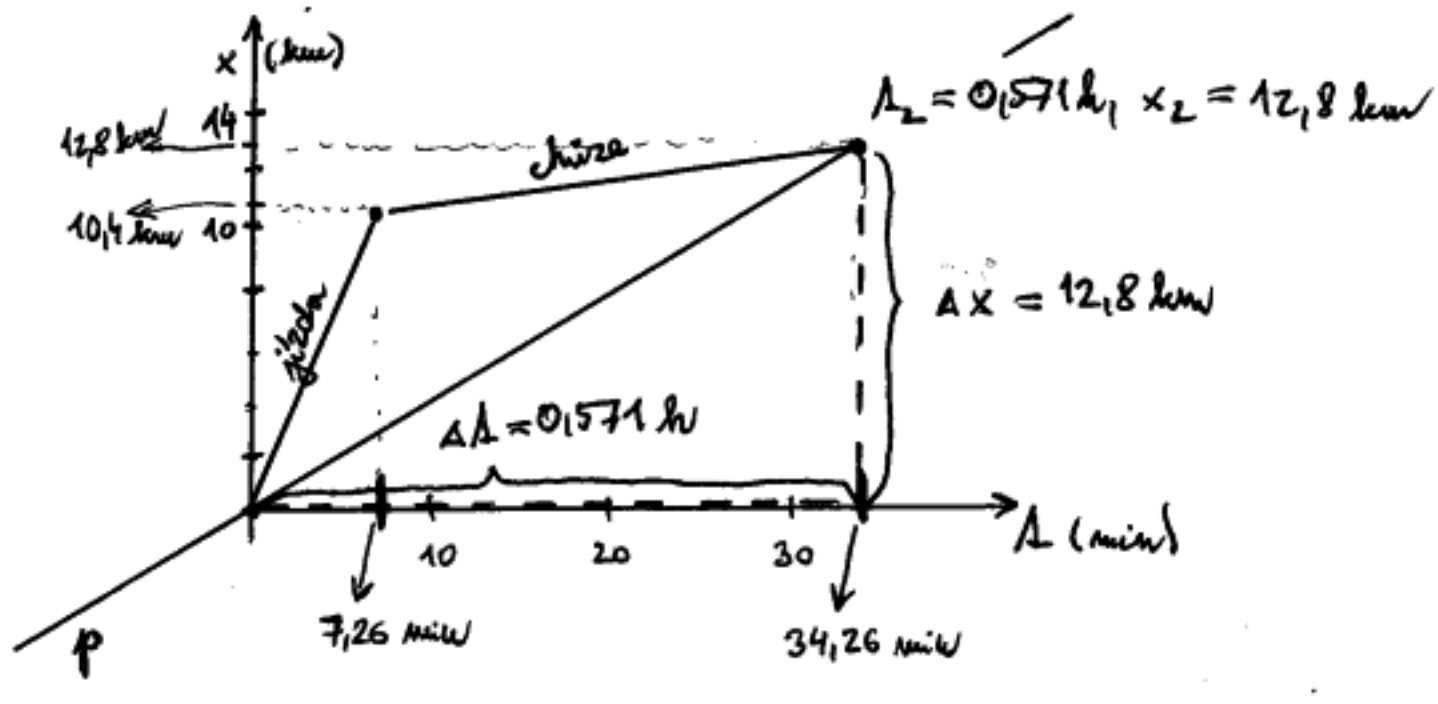
Celkový čas = čas jízdy dodávky + čas chůze = 0,121 + 0,45 = 0,571 h

Průměrná rychlost

$$\bar{v} = \frac{12{,}8}{0{,}571} \doteq \underline{\underline{22{,}4 \text{ km/h}}}$$

b) graficky: počátek pohybu umístíme do počátku soustavy souřadnic:

$t_1 = 0$, $x_1 = 0$; směr pohybu bude kladný směr osy x



průměrná rychlost = směrnice přímky $p = \frac{12{,}8}{0{,}571} = \underline{\underline{22{,}4\ km/h}}$.]

P. 2. Návrat k dodávce trvá řidiči 35 min. Musí totiž vzít nádobu s palivem a proto jde pomaleji. Jaká je průměrná rychlost řidiče na celé trati od okamžiku výjezdu z výchozího místa až po návrat od čerpací stanice?

[Řešení: Protože řidič se pěšky vracel v záporném směru pohybu,

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= 10{,}4 + 2{,}4 - 2{,}4 = 10{,}4\ km \\ \Delta t &= 0{,}121 + 0{,}45 + 0{,}583 = 1{,}154\ h \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{v} = \frac{10{,}4}{1{,}154} = \underline{\underline{9{,}01\ km/h}}$$]

Varianta 2: Po doplnění paliva se dodávka vrací zpět do bodu, odkud vyjela, rychlostí 80 km/h. Jaká je průměrná rychlost na celé cestě?

[$\Delta x = 0$, tj. $\bar{v} = 0$]

Kromě průměrné rychlosti v daném kladném směru se zavádí ještě průměrná absolutní rychlost $\bar{v}_{abs}$ která udává průměrnou rychlost bez ohledu na směr pohybu (dosazují se do ní jen kladné hodnoty, tj. je vždy ≥ 0):

$$\boxed{\bar{v}_{abs} = \frac{\text{celková uražená dráha}}{\text{celková doba pohybu}}} \quad . \qquad (2.3)$$

P. 3. Určete průměrnou absolutní rychlost v příkladu P. 2.

[Řešení: $\bar{v}_{abs} = \frac{10{,}4 + 2{,}4 + 2{,}4}{0{,}121 + 0{,}45 + 0{,}583} = \underline{\underline{13{,}17\ km/h}}$]

Všechny členy v čitateli i jmenovateli se při výpočtu $\bar{v}$ sečtou s kladným znaménkem, tj. průměrná absolutní rychlost je vždy nezáporná.
(celkovou uraženou dráhu udává např. tachometr v autě)

Pozn.: 1. Při výpočtech je důležité dosazovat odpovídající jednotky – např. počítáme-li rychlost v km/h, musíme dosazovat vzdálenosti v km a čas v hodinách.

2. Je důležité dobře číst z grafů – na vodorovnou osu jsme nanášeli čas (jeho hodnoty rostou směrem doprava), na svislou osu jsme nanášeli polohu hmotného bodu vzhledem k počátku soustavy souřadnic (poloha roste směrem nahoru). Body grafu [t, x] udávají, že v okamžiku t se sledovaný hmotný bod vyskytuje v poloze x.

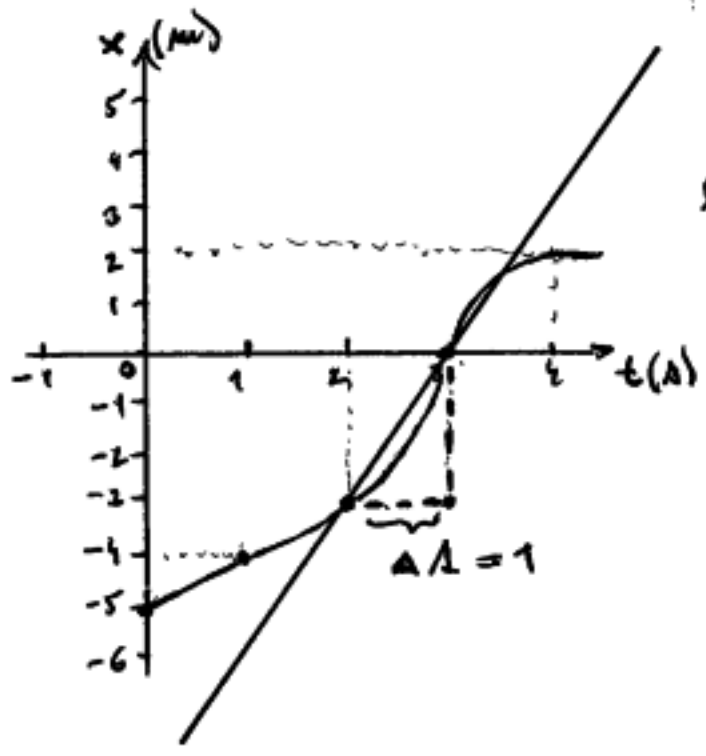
2.4. Okamžitá rychlost

Vraťme se k našemu popisu pohybu králíka (obr. na str. MF 3). Budeme-li časový interval Δt zkracovat až na nulu, průměrná rychlost $\bar{v}$ pohybu za časový interval Δt se stává okamžitou rychlostí v ... veličina, která udává, jak rychle a jakým směrem se králík pohybuje (v daném okamžiku). Tato zkracování intervalu Δt na nulu se označuje jedním ze následujících dvou zápisů:

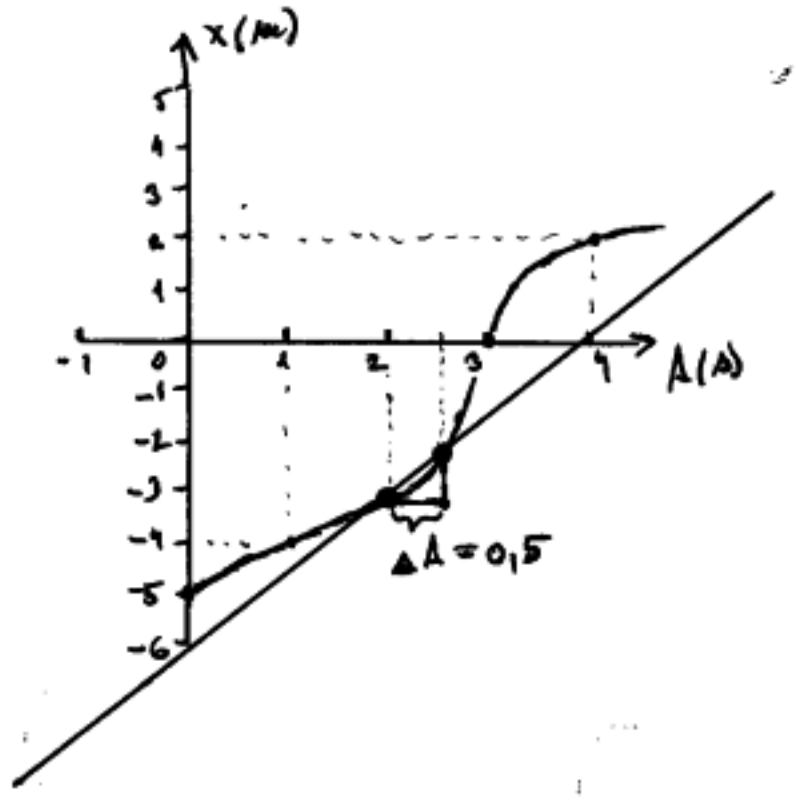
$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}} \qquad (2.4).$$

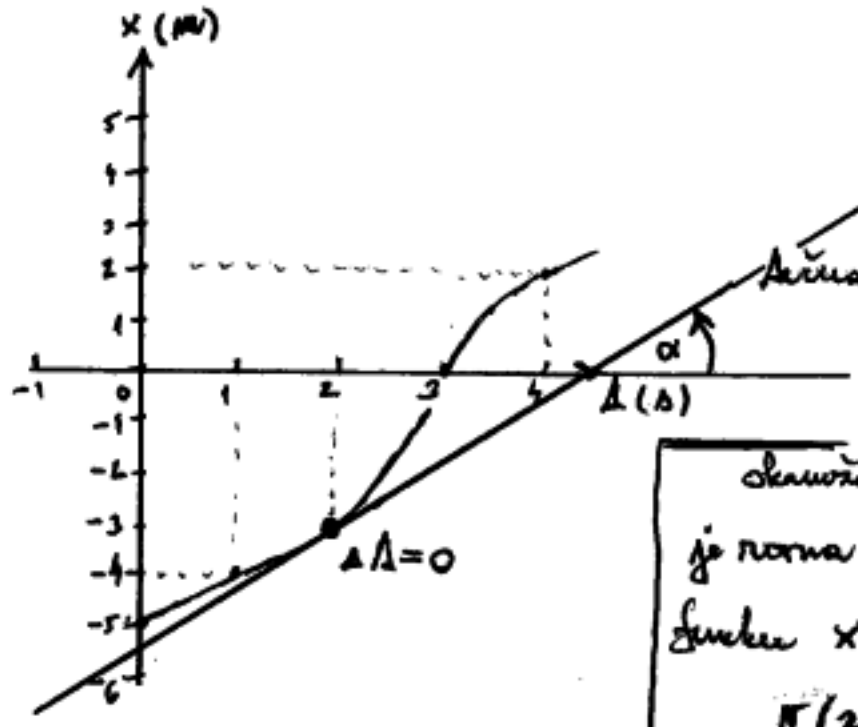
Označení $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ čteme: limita, pro Δt jdoucí k nule, z výrazu $\frac{\Delta x}{\Delta t}$

Označení $\frac{dx(t)}{dt}$ čteme: derivace funkce $x(t)$ vzhledem k proměnné t



například chceme-li zjistit okamžitou rychlost králíka v okamžiku $t = 2$, sestrojujeme sečny protínající graf v bodě $[2, x(2)]$ a $[2+\Delta t, x(2+\Delta t)]$ pro stále menší Δt





Tečna ke grafu funkce $x(t)$ v bodě $[2, x(2)]$ (dotýká se grafu v jediném bodě)

okamžitá rychlost v čase $t = 2$ je rovna směrnici tečny ke grafu funkce $x(t)$ v bodě $[2, x(2)]$, tj.

$$v(2) = \operatorname{tg} \alpha \ \mathrm{ms^{-1}}$$

Právě jsme popsali geometrický význam derivace funkce $x(t)$ pro $t = 2$:

derivace funkce $x(t)$ pro $t = 2$	=	směrnice tečny ke grafu funkce $x(t)$ v bodě $[2, x(2)]$

tedy $\frac{dx}{dt}(2) = v(2) = \operatorname{tg} \alpha$. Okamžitá rychlost pohybu kuličky pro $t = 2$ je rovna derivaci funkce $x(t)$ pro $t = 2$.

Několik slov (a dva obrázky) k pojmu derivace :

Když je funkce $F(t)$ slušná, lze sestrojit tečnu k jejímu grafu pro každé t (viz horní obrázek na následující straně) : čili existuje derivace funkce $F(t)$ pro různá t : $\frac{dF}{dt}(1) = \operatorname{tg} \alpha$, $\frac{dF}{dt}(2) = \operatorname{tg} \beta$

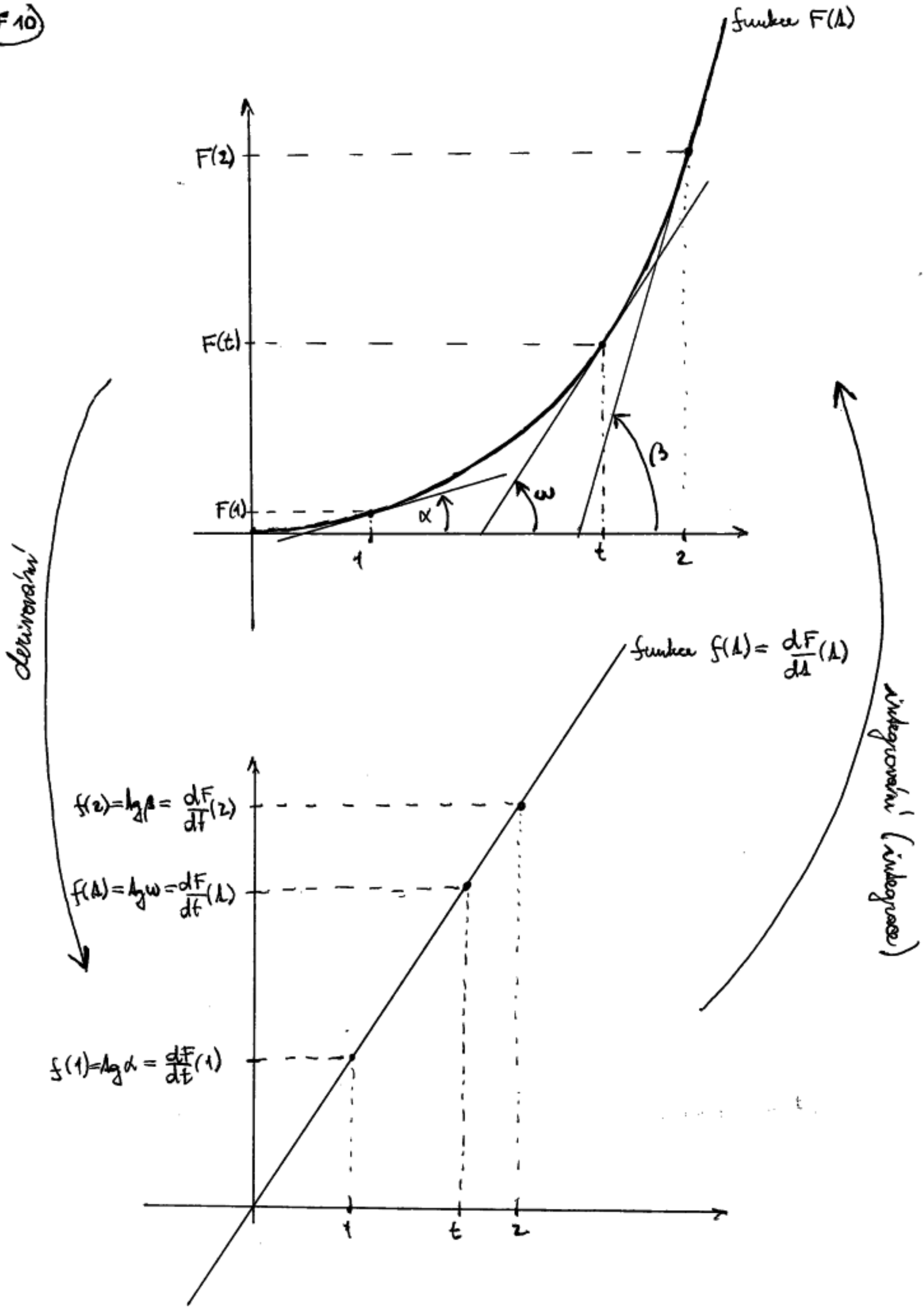
a obecně v každém bodě t : $\frac{dF}{dt}(t) = \operatorname{tg} \omega$.

Jinými slovy, libovolné hodnotě t lze přiřadit derivaci $\frac{dF}{dt}(t)$. Toto přiřazení je také funkce, označme ji třeba $f(t)$: $\boxed{f(t) := \frac{dF}{dt}(t)}$

Funkci $f(t)$ se také říká derivace. Ze souvislosti věty je obvykle jasné, zda derivací máme na mysli jedinou hodnotu (např. v bodě 2 ... $\frac{dF}{dt}(2)$), nebo celou funkci ($\frac{dF}{dt}(t)$ definovanou pro různé hodnoty proměnné t).

Proces, který pro funkci $F(t)$ najde její derivaci $f(t)$, se nazývá derivování . Opačný proces, který k funkci $f(t)$ najde funkci $F(t)$ tak, že $\frac{dF}{dt}(t) = f(t)$, se nazývá integrování (integrace).

(MF 10)


funkce F(1)
F(2)
F(t)
F(1)
α
ω
β
1
t
2
derivování
integrování (integrace)
funkce f(1) = dF/d1 (1)
f(2) = tg β = dF/dt (2)
f(1) = tg ω = dF/dt (1)
f(1) = tg α = dF/dt (1)
1
t
2

Zapisujeme $F(t) = \int f(t)\,dt$ a říkáme, že funkce $F(t)$ je neurčitý integrál z funkce $f(t)$.

Vraťme se nyní k pojmu derivace – při jejím výpočtu sečtěnou nepostupujeme geometricky, že bychom kreslili sečnu a měřili úhel, který svírá s osou t; ale využíváme analytického zápisu tohoto postupu do vzorce:

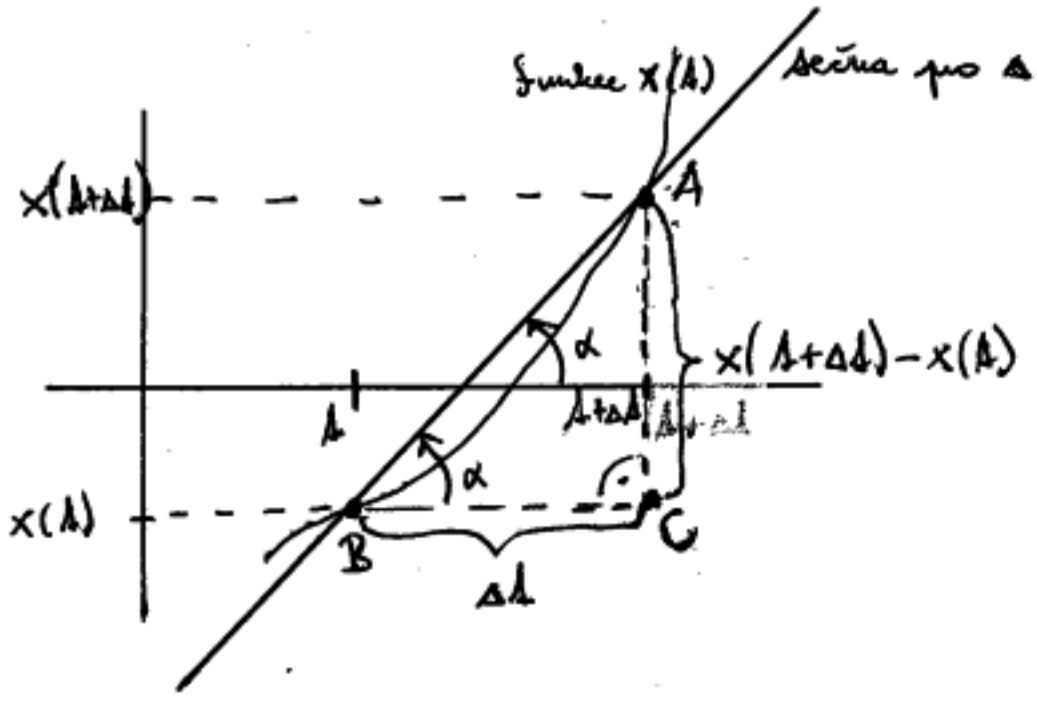
Zapíšeme směrnici sečny $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, a pak v tomto zápisu snižujeme Δt k nule a sledujeme, k jaké hodnotě se podíl blíží

Tomuto přibližování Δt k jisté hodnotě se říká limitní proces, a nalezená hodnota se nazývá limita

$$\boxed{\left(\begin{array}{c}\text{derivace funkce } x(t)\\ \text{pro } t=2\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{limita směrnice sečny } \frac{\Delta x}{\Delta t}\\ \text{pro } \Delta t \text{ jdoucí k nule}\end{array}\right)}$$

čti: limita pro Δt jdoucí k nule z výrazu...

Tedy $$\frac{dx}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right).$$



směrnice sečny $= \frac{AC}{BC} = \operatorname{tg}\alpha$

podle vzorce (4.18)* $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

Vypočtěme například derivaci funkce $x(t) = t^2$ v obecném bodě t:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{t^2 + 2t\cdot\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(2t + \Delta t\right) = 2t$$

Podobně by se spočítala derivace funkce $x(t) = t^n$: $\boxed{\frac{d}{dt}(t^n) = n\cdot t^{n-1}}$ (D1)

Některé další vypočtené derivace : $x(t) = c$ = konstanta (konstantní funkce) (MF12)

derivací konstanty je nula : $\boxed{\frac{d}{dt}(c) = 0}$ (D0)

Konstantu při derivování můžeme vytknout (před derivaci) : $\boxed{\frac{d}{dt}\left(c \cdot x(t)\right) = c \cdot \frac{dx(t)}{dt}}$ (V1)

Součet funkcí derivujeme člen po členu: $\boxed{\frac{d}{dt}\left(x(t) + y(t)\right) = \frac{dx(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt}}$ (V2)

Vzorce pro derivace dalších funkcí nebudeme vypisovat (lze je najít v tabulkách). Protože integrování je proces opačný k derivaci, vzorce pro integrování lze odvodit ze vzorců pro derivování :

např. $\boxed{\int t^{n-1}\, dt = \frac{t^n}{n}}$ (D1')

jinak přepsaný vzorec D1

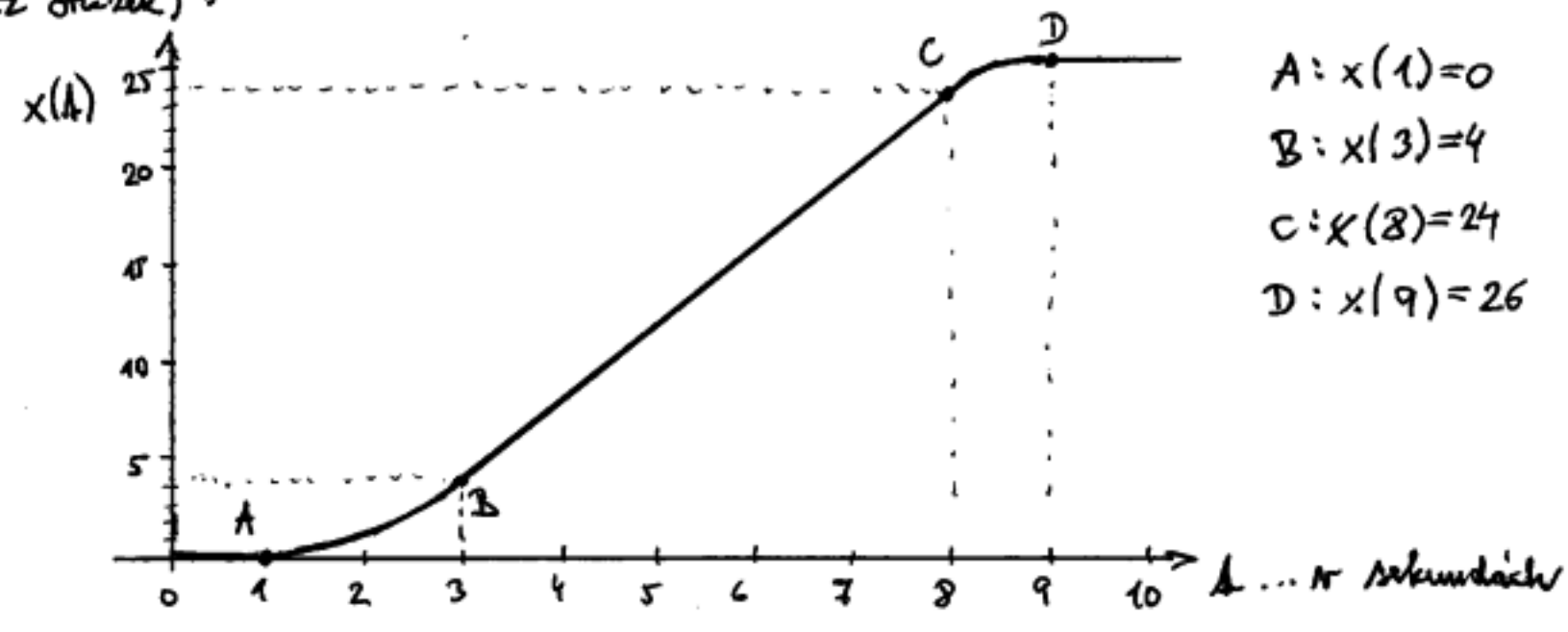
K pojmu derivace tedy shrnutí :

matematické významy
- algebraický význam derivace : derivace je limita z jistého výrazu
- geometrický význam derivace : derivace je tangens jistého úhlu (= směrnice tečny)

fyzikální význam derivace : derivace je okamžitá rychlost změny jisté veličiny

P.4. Funkce $x(t) = \begin{cases} 0 \ldots & t \leq 1 \\ t^2 - 2t + 1 \ldots & 1 < t \leq 3 \\ 4t \ldots & 3 < t \leq 8 \\ -2t^2 + 36t - 136 \ldots & 8 < t \leq 9 \end{cases}$ udává polohu kabiny výtahu v metrech

(viz obrázek) :



A : $x(1) = 0$

B : $x(3) = 4$

C : $x(8) = 24$

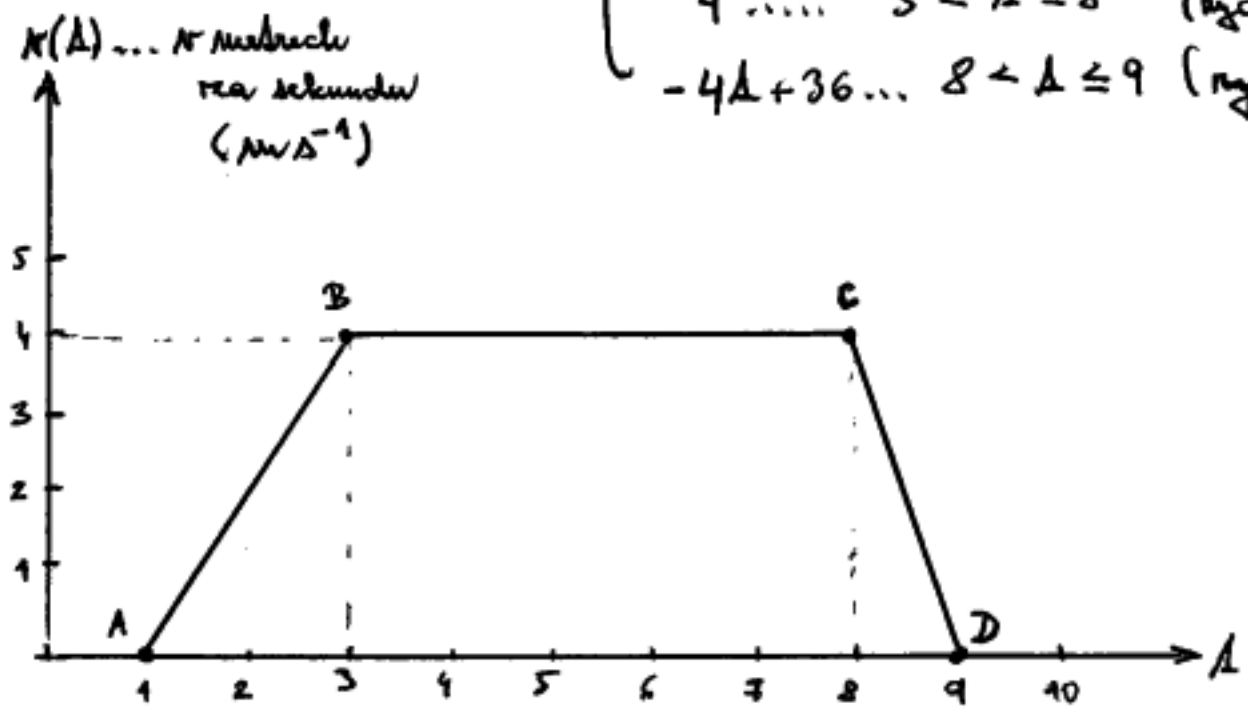
D : $x(9) = 26$

Kabina nejprve stojí v dolním patře, pak se začíná pohybovat nahoru (v hladném

směru svislé osy) a opět se zastaví. Nakreslete závislost rychlosti $v(t)$ kabiny na čase. (MF 13)

[Řešení: Podle právě popsané teorie lze rychlost $v(t)$ výtahu v okamžiku t spočítat jako derivaci dráhy $x(t)$ podle proměnné t:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} 0 \ldots & t \leq 1 \\ 2t-2 \ldots & 1 < t \leq 3 \quad \text{(rychlost roste)} \\ 4 \ldots\ldots & 3 < t \leq 8 \quad \text{(rychlost je konstantní)} \\ -4t+36 \ldots & 8 < t \leq 9 \quad \text{(rychlost klesá)} \end{cases}$$

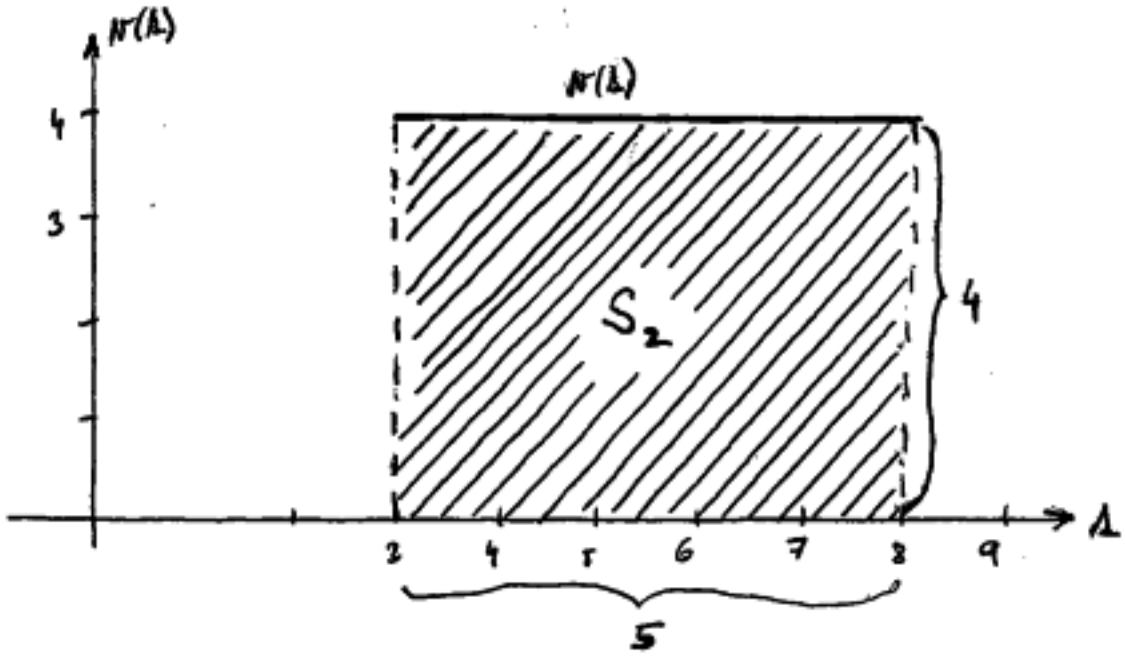


]

Kdybychom v příkladu P.4 naopak poznali funkci polohy $x(t)$, ale neznali funkci rychlosti $v(t)$, mohli bychom řešit „opačnou" úlohu: Jakou dráhu výtah urazí od okamžiku $t=0$ do okamžiku $t=9$?

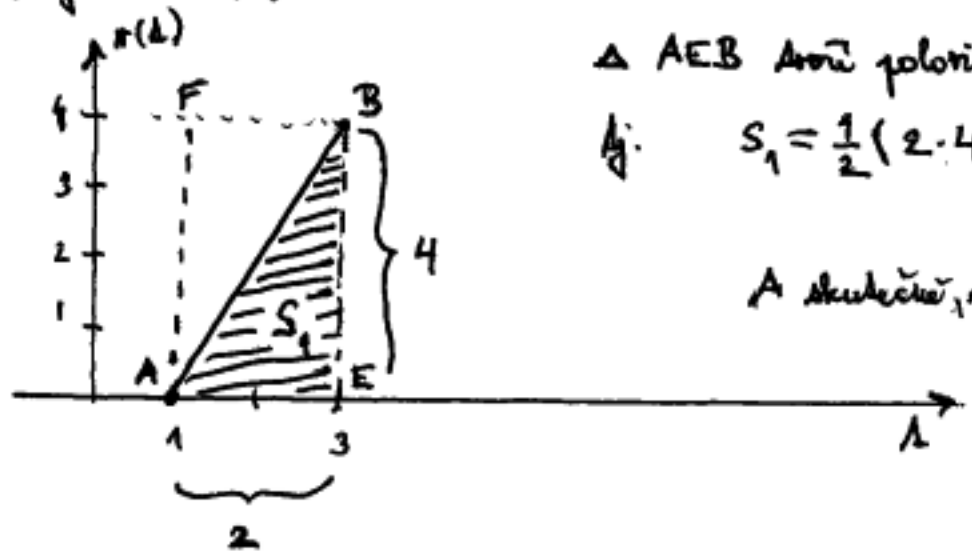
- Na intervalu $\langle 0;1 \rangle$ je situace jednoduchá: protože $v(t)=0$, výtah se vůbec nepohne, zůstává na místě

- situace na intervalu $\langle 3;8 \rangle$: zde se výtah pohybuje konstantní rychlostí $v(t) = 4\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ po dobu 5 sekund, výtah tedy urazí dráhu 20 m. Zde je zajímavé si všimnout, že velikost uražené dráhy je rovna obsahu plochy pod grafem funkce $v(t)$:



Obsah S_2 obdélníka je roven $4\ \mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 5\ \mathrm{s} = 20\ \mathrm{m}$ ... udává velikost uražené dráhy

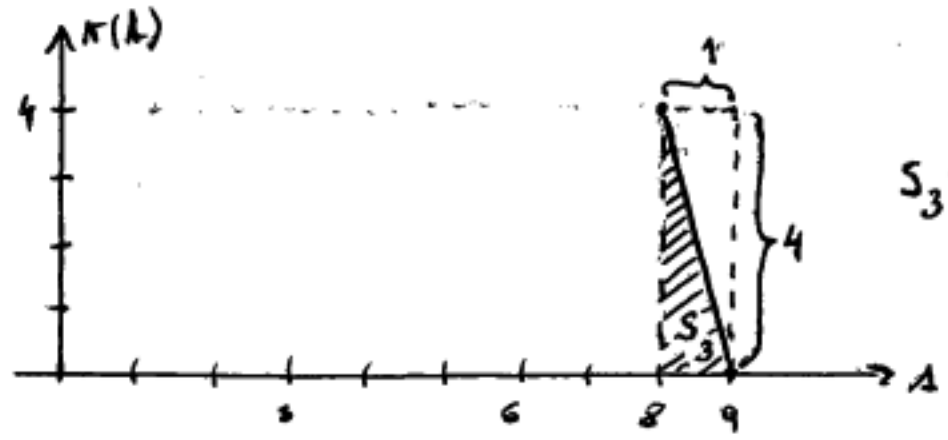
– situace na intervalu $\langle 1;3\rangle$: rychlost výtahu se rovnoměrně zvyšuje ze hodnoty $v = 0\ ms^{-1}$ v čase $t=1$ na hodnotu $v = 4\ ms^{-1}$ v čase $t=3$. Pokusme se ověřit objevující se dlouhý fakt, že velikost uražené dráhy je rovna obsahu plochy pod grafem funkce $v(t)$:



△ AEB tvoří polovinu obsahu obdélníka AEBF, tj. $S_1 = \frac{1}{2}(2\cdot 4) = 4$

A skutečně, velikost uražené dráhy je rovna 4 m

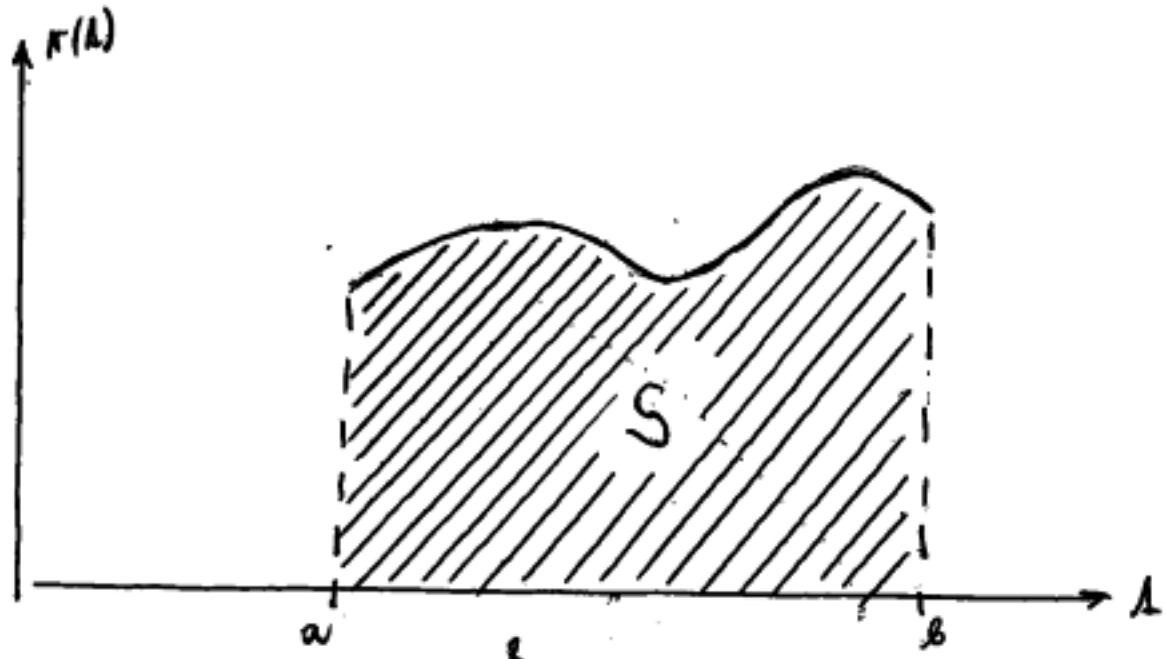
– situace na intervalu $\langle 8;9\rangle$: rychlost výtahu $4\ ms^{-1}$ se během jedné sekundy rovnoměrně zpomaluje na $0\ ms^{-1}$. Uražená dráha je opět rovna obsahu plochy:



$S_3 = \frac{1}{2}(1\cdot 4) = 2$

Celková tedy uražená dráha $= S_1 + S_2 + S_3 = 4 + 20 + 2 = \underline{\underline{26\ m}}$.

Nabízí se otázka, jak by se spočítal obsah podgrafu, kdyby funkce $v(t)$ byla složitější:



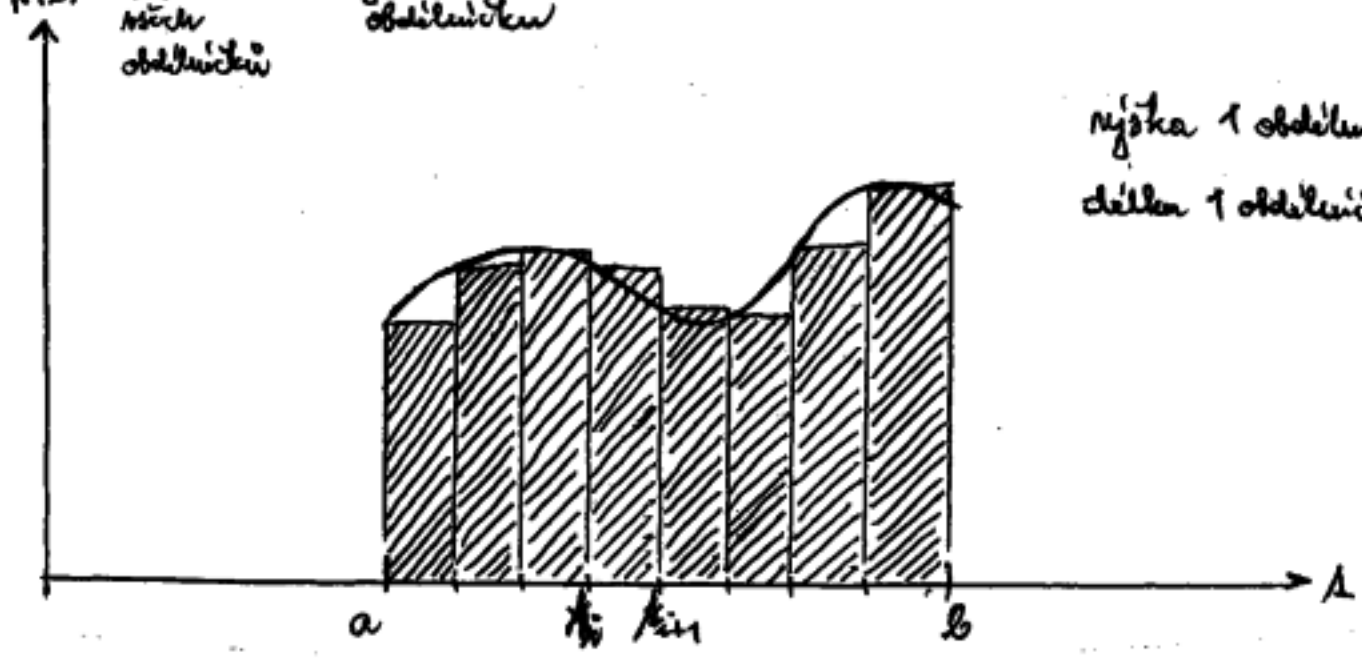
Tento obsah označujeme symbolem $\int_a^b v(t)\,dt$ = dráha uražená od okamžiku $t=a$ do okamžiku $t=b$

(určitý integrál z funkce $v(t)$ v mezích od $\underline{a}$ do $\underline{b}$).

Kupodivu tento určitý integrál se vypočte opět jako jistá limita, a sice limita z výrazu

$$\boxed{V(\Delta) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}}_{\text{součet obsahů všech obdélníčků}} \underbrace{f(t_i)\cdot(t_{i+1}-t_i)}_{\text{obsah jednoho obdélníčku}}}$$

pro $t_{i+1}-t_i \leq \Delta$ jdoucí k nule
(tj. n = počet obdélníčků jdoucí k ∞)



Je vidět, že při zkracování délky základny obdélníčků $t_{i+1}-t_i$ až k nule se součet jejich obsahů stále přesněji blíží obsahu S. V našem označení $S = \int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\Delta\to 0} V(\Delta)$,

tj. z výrazu $V(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot(t_{i+1}-t_i)$ dostáváme v limitním procesu pro Δ jdoucí k 0

výraz $\int_a^b f(t)\,dt$

(dt ... označuje velmi malý kousek (až nulový) na ose t
$\int_a^b$ ... označuje součet obsahů velkého množství (nekonečně mnoha) malých obdélníčků)

V 17. století pánové Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz objevili úžasný vztah mezi určitým integrálem a teorií derivací:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)} \quad (2.5)$$

, kde $\frac{dF}{dt}(t) = f(t)$, respektive $F(t) = \int f(t)\,dt$.

Tomuto vztahu se říká Newton-Leibnizova formule. Tato formule říká, že změnu veličiny F lze určit jako určitý integrál (= obsah plochy) funkce f, která je její derivací [platí to, pokud funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$].

Díky této formuli (= vzorci) můžeme počítat jako obsah plochy nejen změnu polohy $x(t)$, ale změnu jakékoli veličiny, pokud známe její derivaci.

K pojmu určitého integrálu shrnutí:

a) algebraický význam určitého integrálu: $\int_a^b f(t)\,dt$ = limita z jistého součtu

(„součet nekonečně mnoha nekonečně malých veličin")

b) Geometrický obsah určitého integrálu: $\int_a^b f(t)\,dt$ = obsah plochy podgrafu funkce $f(t)$ na intervalu $\langle a; b\rangle$.

c) Fyzikální význam určitého integrálu: $\int_a^b v(t)\,dt = x(b) - x(a)$ ... integrál z rychlosti změny veličiny je roven rozdílu množství této veličiny v okamžicích $t=b$ a $t=a$

Kdybychom v příkladu P.4 znali rychlost $v(t)$, ale neznali polohu $x(t)$, jsme schopni počítat rozdíly polohy $x(b)-x(a)$ pro různé časové intervaly $\langle a; b\rangle$, ale nemůžeme nakreslit graf polohy $x(t)$. K nakreslení grafu $x(t)$ potřebujeme znát kromě $v(t)$ ještě přesnou polohu x v aspoň jednom bodě t (například $t=0$). Pak

$$(2.6)\qquad \boxed{x(t) = x(0) + \int_0^t v(u)\,du}$$

Jedná se vlastně o Newton-Leibnizův vzorec, kde $x(0)$ je přeneseno na opačnou stranu rovnosti

$x(t)$: poloha v okamžiku/čase t

$x(0)$: poloha v čase $t=0$

$\int_0^t v(u)\,du$: posun (= změna) polohy mezi okamžikem $t=0$ a okamžikem t

P.5. Poloha hmotného bodu, který se pohybuje po ose x, je dána vztahem

$$x(t) = 7{,}8 + 9{,}2\,t - 2{,}1\,t^3 .$$

Určete jeho rychlost v okamžiku $t = 3{,}5\,s$. Je jeho rychlost stálá, nebo se spojitě mění?

[Řešení: Vyjádříme $v(t)$ podle vztahu (2.4) jako derivaci polohy $x(t)$:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 0 + 9{,}2 - 2{,}1\cdot 3\cdot t^2 = 9{,}2 - 6{,}3\,t^2$$

Vidíme, že ve vztahu $v(t) = 9{,}2 - 6{,}3\,t^2$ vystupuje proměnná t, tedy rychlost $v(t)$ je proměnná (mění se). V okamžiku $t = 3{,}5\,s$ se hmotný bod pohybuje rychlostí

$v(3{,}5) = 9{,}2 - 6{,}3\cdot 3{,}5^2 \doteq \underline{-68\ m\,s^{-1}}$

záporné znaménko naznačuje, že pohyb se děje v záporném směru osy x.]

Kontrola 3. Pro $t>0$ je poloha částice dána vztahem a) $x = 3t-2$ metrů

b) $x = -4t^2-2$ metrů

c) $x = \frac{2}{t^2}$ metrů

d) $x = -2$ metrů

Čas t je zadáván v sekundách. Ve kterém z uvedených případů je rychlost částice

1) konstantní?

2) záporná?

3) kdy se pohyb částice zpomaluje?

2.5. Zrychlení

Pokud se mění rychlost hmotného bodu, říkáme, že dochází ke zrychlení

označení z anglického acceleration = zrychlení

Opět můžeme mluvit o zrychlení průměrném a okamžitém

Průměrné zrychlení $\bar{a}(t)$ za časový interval Δt je dáno vztahem

$$\boxed{\bar{a}(t) = \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}} \qquad (2.7)$$

Okamžité zrychlení $a(t)$ v okamžiku t se opět získá jako směrnice tečny = derivace:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}} \qquad (2.8)$$

Spojením rovnic (2.4) a (2.8) dostáváme vztah mezi zrychlením $\vec{a}(t)$ a polohou $\vec{x}(t)$:

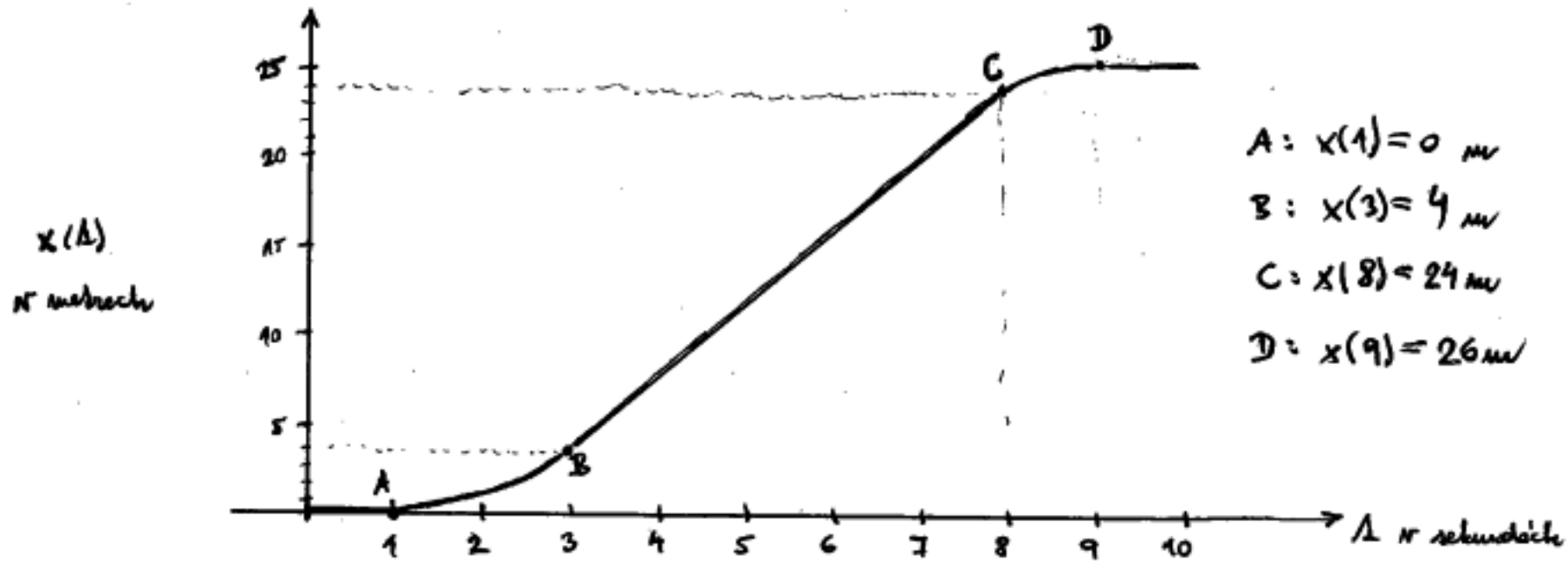
$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{x}(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}} \qquad (2.9)$$

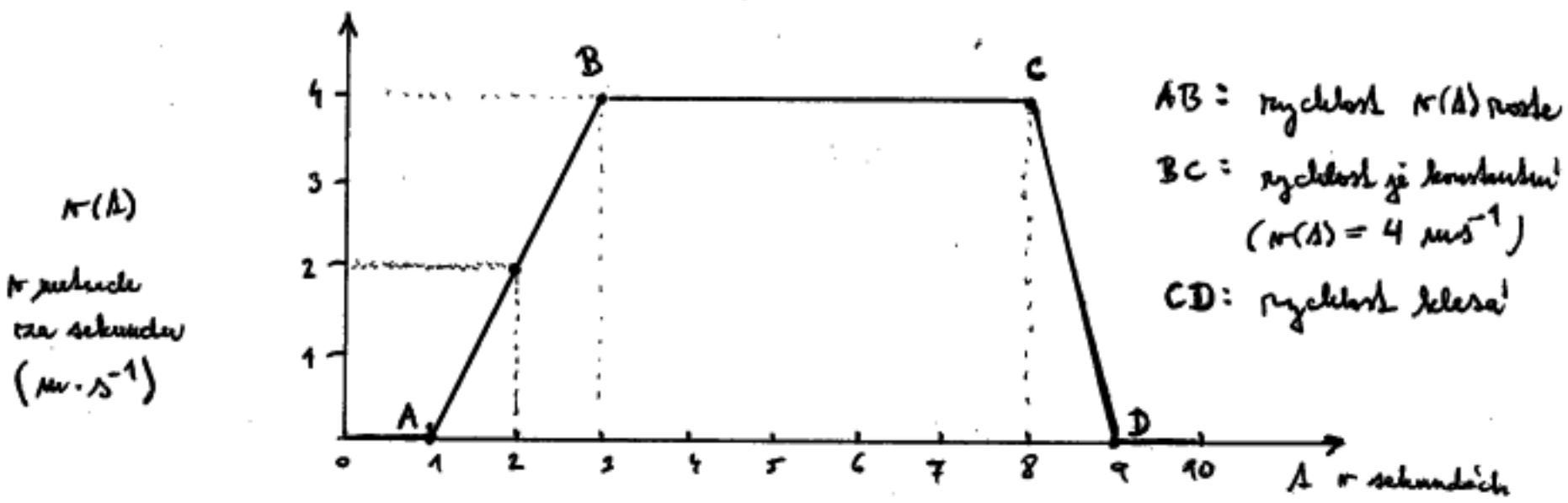
Ano, zrychlení (okamžité) hmotného bodu je dáno druhou derivací polohy $x(t)$ podle času.

Jednotkou zrychlení je $\frac{m\,s^{-1}}{s} = m\,s^{-2}$ (čti: metr sekunda na mínus druhou).

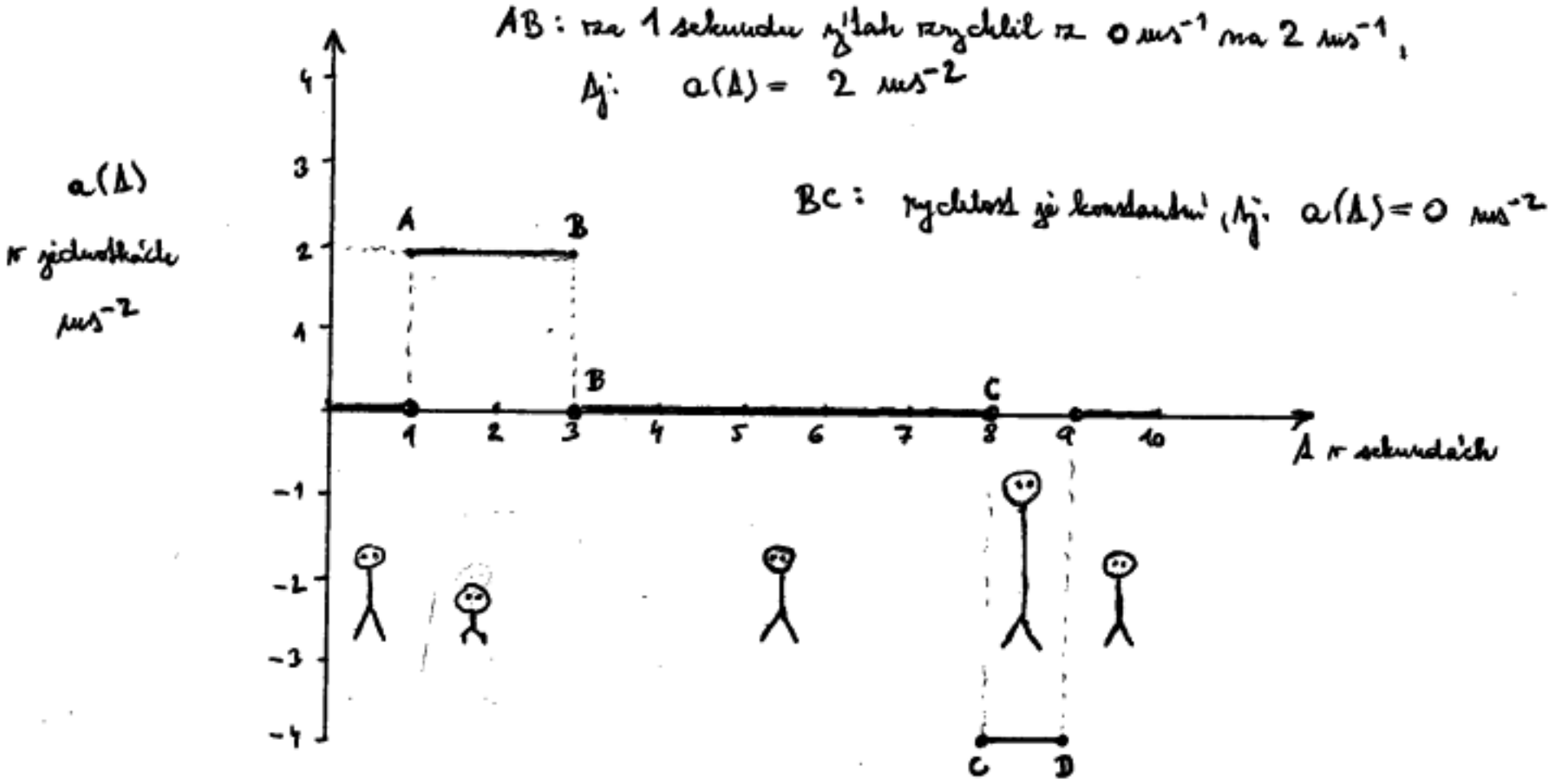
Samozřejmě, že tuto jednotku lze převádět i do jiných rozměrů, ale vždy se jedná o délka · čas^{-2} (např. km · hod^{-2}, apod.)

Ad příklad P.4. Vraťme se k příkladu pohybu výtahu a přemýšlejme zde o zrychlení.
Pro názornost si vzpomeňme i grafy polohy $x(t)$ a rychlosti $v(t)$:





AB: za 1 sekundu výtah zrychlil z $0\ ms^{-1}$ na $2\ ms^{-1}$,
tj. $a(t) = 2\ ms^{-2}$



CD: za 1 sekundu výtah zpomalil z rychlosti $4\ ms^{-1}$ na $0\ ms^{-1}$,
tj. $a(t) = -4\ \frac{ms^{-1}}{s} = -4\ ms^{-2}$
(říkáme, že zrychlení je záporné)

Jak výstižně napovídají postavičky na obrázku, v úseku AB jsme ve výtahu „tlačeni k zemi", v úseku CD „máme žaludek v krku". Pokud se výtah pohybuje konstantní rychlostí (úsek BC), nic zvláštního nepociťujeme.

Zkrátka a dobře, na bezprostřední prožívání člověka působí zrychlení, nikoli rychlost (při jízdě autem stálou rychlostí 90 km/h nebo letu letadlem stálou rychlostí 900 km/h si naše tělo pohyb vůbec neuvědomuje).

Zrychlení někdy vyjadřujeme v tzv. jednotkách „g", kde

$$\boxed{1\,g = 9{,}80665\ \mathrm{m\,s^{-2}} \doteq 9{,}8\ \mathrm{m\,s^{-2}} \quad (\text{jednotka } g).} \qquad (2.10)$$

→ pravděpodobně z anglického gravitation = gravitace

1 g = tzv. normální tíhové zrychlení = rychlost tělesa volně padajícího v blízkosti zemského povrchu

(v severní zeměpisné šířce 45° na úrovni mořské hladiny ... přijata na 2. generální konferenci pro váhy a míry v roce 1901).

P.6. a) Kitty O'Neilová vytvořila rekord v závodech dragsterů, když dosáhla nejvyšší rychlosti 628,85 km/h v nejkratším čase 3,72 s. Jaké bylo průměrné zrychlení jejího auta?

b) Jaké bylo průměrné zrychlení sání Eliho Beedinga ml., který dosáhl rychlosti 116 km/h za 0,04 s?

[řešení:

ad a) $$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(628{,}85-0)\ \mathrm{km/h}}{(3{,}72-0)\ \mathrm{s}} = \frac{174{,}68\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{3{,}72\ \mathrm{s}} = \underline{\underline{47\ \mathrm{m\,s^{-2}} \doteq 4{,}8\,g}}$$

ad b) $$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{116\ \mathrm{km/h}}{0{,}04\ \mathrm{s}} = \frac{32{,}22\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{0{,}04\ \mathrm{s}} = \underline{\underline{806\ \mathrm{m\,s^{-2}} \doteq 82{,}1\,g}}$$

Protože lidské tělo snímá zrychlení, nikoli rychlost, maximum většího výkonu je zrychlení 82,1 g Eliho sání (i když dosáhl větší rychlosti, kdyby zrychlení, kterému byl vystaven, trvalo delší dobu, bylo by smrtelné).]

Mohlo by se zdát, že když je $a(t)$ kladné, tak těleso zrychluje, a když záporné, tak zpomaluje. Ale to vždy není pravda: například pokud je $v(t)$ záporné (těleso se pohybuje v záporném směru osy x) a $a(t)$ také záporné, znamená to, že těleso se stále rychleji pohybuje v záporném směru osy x.

Správnou interpretaci znaménka zrychlení lze tedy shrnout v následující poučce:

Pokud mají $v(t)$, $a(t)$ stejné znaménko, těleso v čase t zrychluje.
Pokud mají $v(t)$, $a(t)$ různá znaménka, těleso v čase t zpomaluje.

Kontrola 4. Pes běží podél osy x. Jaké znaménko má jeho zrychlení, pohybuje-li se pes

a) v kladném směru osy x a zrychluje
b) v kladném směru osy x a zpomaluje
c) v záporném směru osy x a zrychluje
d) v záporném směru osy x a zpomaluje?

P.7. Poloha částice pohybující se podél osy x je dána vztahem $x(t) = 4 - 27t + t^3$ metrů

a) určete $v(t)$, $a(t)$
b) je v některém okamžiku rychlost částice nulová?
c) popište pohyb částice pro $t \geq 0$.

[řešení:

ad a) $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \underline{\underline{-27 + 3t^2}}\ ms^{-1}$, $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \underline{\underline{6t}}\ ms^{-2}$

ad b) $-27 + 3t^2 = 0$

$3t^2 = 27$

$t = \pm 3$ ... rychlost částice je nulová pro $t = -3$ a pro $t = 3$.

ad c) Provedeme rozbor závislosti $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$:

časový okamžik $t = 0$: částice je v bodě o souřadnici $x(0) = 4$ m
$v(0) = -27\ ms^{-1}$ ... částice se pohybuje v záporném směru
$a(0) = 0$ ... její zrychlení je nulové

časový interval $0s < t < 3s$: dosadíme například $t = 2$ sekundy:

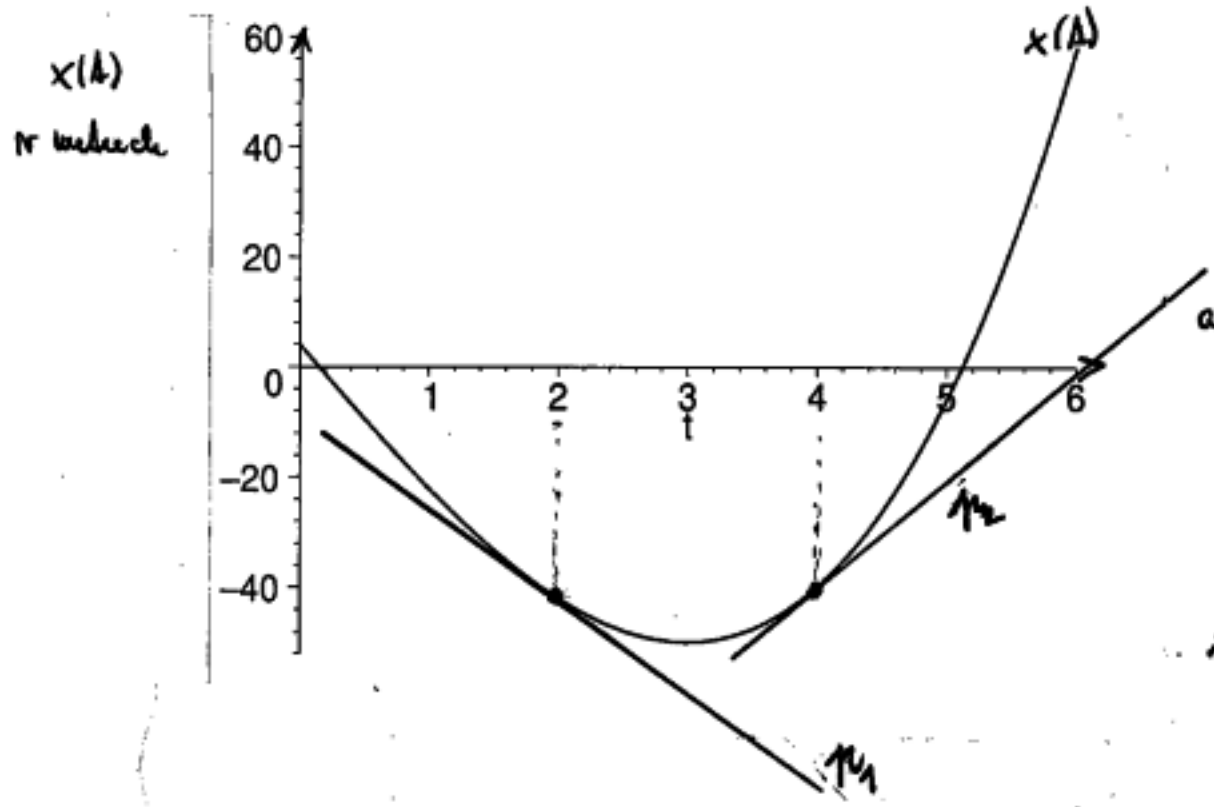
$x(2) = -42$ m
$v(2) = -27 + 3 \cdot 2^2 = -15\ ms^{-1}$
$a(2) = 6 \cdot 2 = 12\ ms^{-2}$

} částice se stále pohybuje v záporném směru, avšak zpomaluje ($v(t)$, $a(t)$ mají rozdílná znaménka)

okamžik $t = 3s$: už jsme viděli v b), že $v(3) = 0$ ... částice má nulovou rychlost
$x(3) = -50$ m ... právě dosáhla nejvzdálenějšího bodu v záporném směru
$a(3) = 18\ ms^{-2}$ ... zrychlení je kladné a roste

pro $t > 3$: $v(t)$ i $a(t)$ jsou kladné a rostou, částice se stále rychleji pohybuje v kladném směru osy x

Pro představu lze vykreslit grafy funkcí $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$:



Poznámka:

a) pro $t = 2$ je tečna p_1 ke grafu $x(t)$ klesající

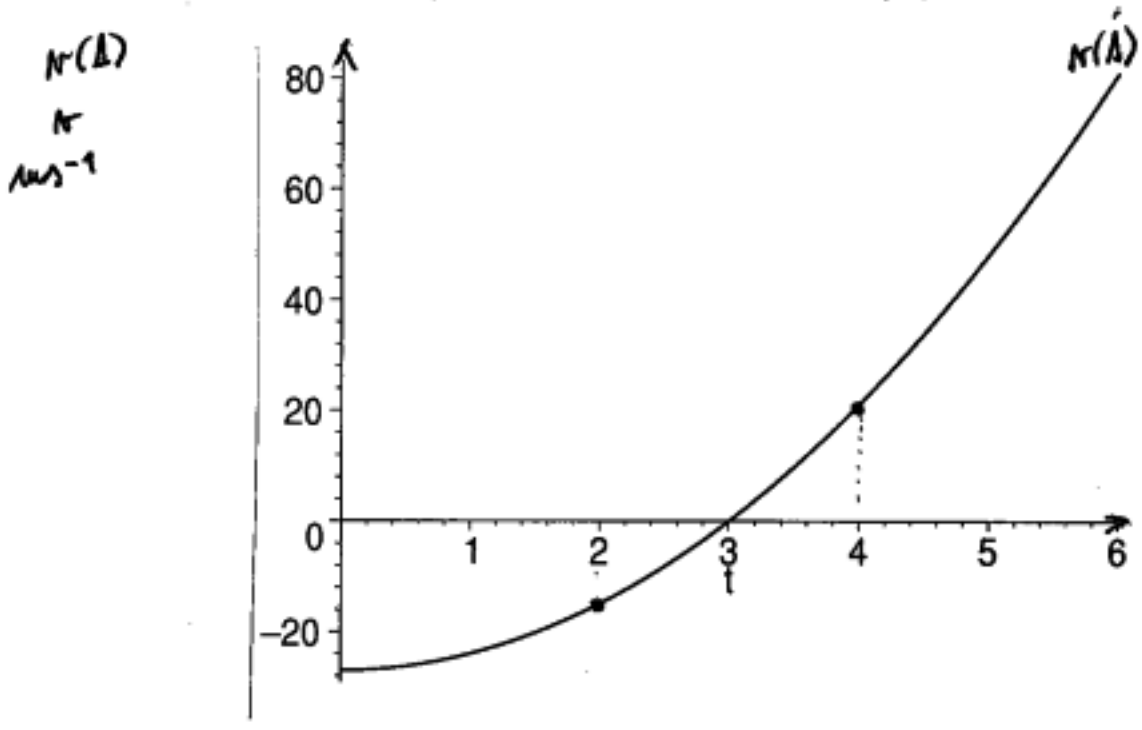
$\Downarrow$

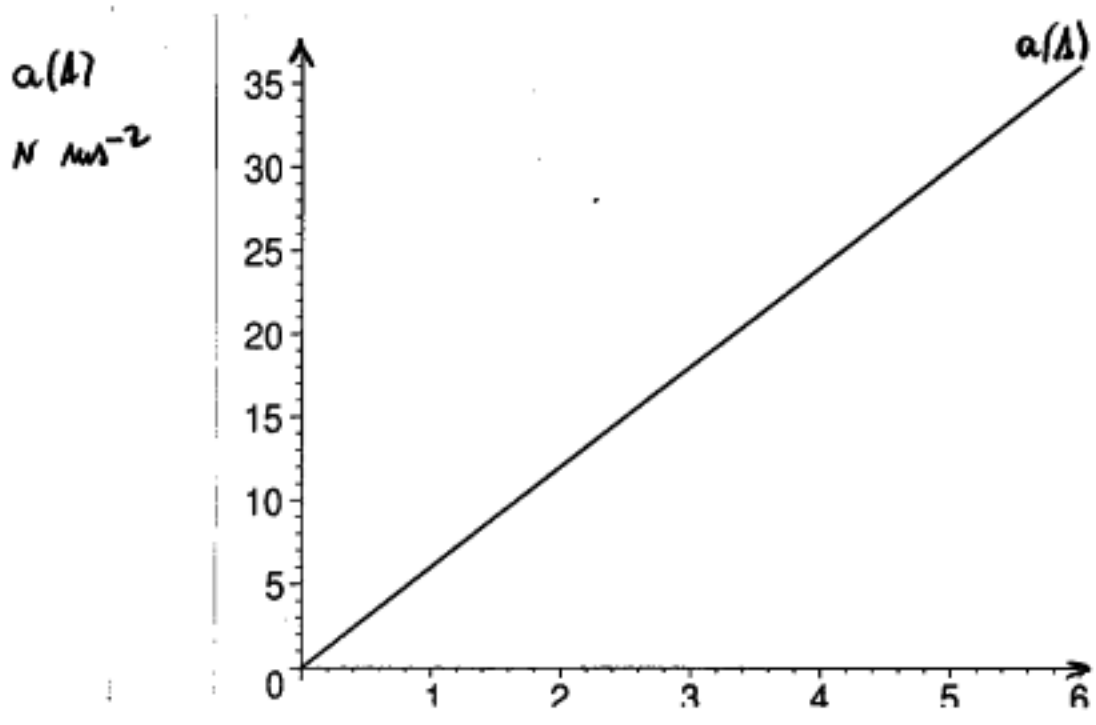
$v(2)$ je záporná

b) pro $t = 4$ je tečna p_2 ke grafu $x(t)$ rostoucí

$\Downarrow$

$v(4)$ je kladná





Zrychlení $a(t)$ neustále roste; nejprve to vede ke zpomalování pohybu částice v záporném směru, pak ke zrychlujícímu se pohybu v kladném směru

2.6. Pohyb rovnoměrně zrychlený (rovnoměrně zpomalený) – klasické odvození

O rovnoměrně zrychlenému (zpomalenému) pohybu už byla řeč v příkladu P. 4, kde výsledek při rozjíždění rovnoměrně zrychloval a při zastavování rovnoměrně zpomaloval (viz MF 18) – zrychlení je zde buď kladná konstanta, nebo záporná konstanta.

Odvoďme nyní obecné rovnice pro rychlost $v(t)$ a polohu $x(t)$ tělesa při rovnoměrně zrychleném pohybu. Vyjdeme z následujícího označení:

x_0 ... poloha tělesa v čase 0
v_0 ... rychlost tělesa v čase 0
$x(t)$ ... poloha tělesa v obecném čase t
$v(t)$ ... rychlost tělesa v obecném okamžiku t
t ... obecný časový okamžik ($t > 0$)
a ... zrychlení (zpomalení), které je v časovém intervalu $\langle 0; t \rangle$ konstantní

Klasický postup odvození:

1) Při rovnoměrně zrychleném pohybu je okamžité zrychlení rovno průměrnému zrychlení, tj. případům vzorce (2.7) máme

$$a = \frac{v(t) - v_0}{t - 0} \Rightarrow \text{odtud vyjádříme } v(t):$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + a \cdot t} \qquad (2.11)$$

2) Vztah (2.2) pro průměrnou rychlost má při našem označení tvar

$$\bar{v} = \frac{x(t) - x_0}{t - 0} \Rightarrow \text{odtud vyjádříme } x(t):$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + \bar{v} \cdot t} \qquad (2.12)$$

3) Z rovnice (2.11) je vidět, že grafem funkce $v(t) = v_0 + a \cdot t$ je přímka (v_0, a ... konstanty)

rychlost rovnoměrně roste

$\Rightarrow$ v takovém případě pro průměrnou rychlost $\bar{v}$ na intervalu platí, že je průměrem počáteční a koncové rychlosti:

$$\boxed{\bar{v} = \frac{v_0 + v(t)}{2}} \qquad (2.13)$$

4) Pokud do (2.13) dosadíme za $v(t)$ vztah (2.11), dostáváme

$$\boxed{\bar{v} = \frac{v_0}{2} + \frac{1}{2}(v_0 + a\cdot t) = v_0 + \frac{1}{2}a\cdot t} \qquad (2.14)$$

5) A konečně do (2.12) dosadíme za $\bar{v}$ vztah (2.14); získáme

$$x(t) = x_0 + \left(v_0 + \frac{1}{2}at\right)\cdot t$$, což lze psát ve tvaru

$$\boxed{x(t) - x_0 = v_0\cdot t + \frac{1}{2}at^2} \qquad (2.15)$$

<u>Shrnutí</u>: abychom se v daném odvozování nezkatili, resp. uvědomme si, co jsme chtěli získat: rovnici (2.11) ... vztah pro rychlost $v(t)$
a rovnici (2.15) ... vztah pro polohu $x(t)$
Tyto dvě rovnice obsahují veškeré dostupné informace o rovnoměrně zrychleném přímočarém pohybu

<u>Pozn.</u>: Je zajímavé, že vztah (2.11) je derivací vztahu (2.15) ... tak to má být, že rychlost $v(t)$ je derivací polohy $x(t)$.

2.7. Rovnoměrně zrychlený pohyb – odvození pomocí diferenciálního a integrálního počtu

<u>Postup odvození</u>:

1) Vyjdeme z definičního vztahu (2.8) pro zrychlení: $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$,

který zintegrujeme od nuly do $\underline{\underline{t}}$ podle Newton-Leibnizovy formule (2.5)

$$\int_0^t a(t)\,dt = \int_0^t dv(t)$$

a) při rovnoměrně zrychleném pohybu je zrychlení $a(t)$ rovno konstantě $\underline{\underline{a}}$, kterou můžeme vytknout před integrál:

$$a\cdot\int_0^t dt = \int_0^t dv(t)$$

b) integrujeme: $a\cdot\underbrace{(t-0)} = \underbrace{v(t)-v_0}$

$\int 1 = \int t^0 = \frac{t^1}{1} = t$

podle vzorce D1' na straně (MF 12)

$\Rightarrow$ podle NL formule (2.5): $\int_0^t dt = t-0$

integrál a derivace se navzájem vyruší, protože to jsou navzájem opačné operace:

$\int dv(t) = v(t)$

$\Rightarrow$ podle NL formule $\int_0^t dv(t) = v(t) - v(0)$

(no a $v(0) = v_0$ podle našeho označení)

čili $\boxed{v(t) = v_0 + a\cdot t}$ (2.11)

2) Vyjdeme ze definičního vztahu (2.4) pro rychlost: $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$,

když zintegrujeme od nuly do t:

a) nejprve dosadíme vztah (2.11) za $v(t)$:

$$v_0 + a\cdot t = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\int_0^t (v_0 + a\cdot t)\,dt = \int_0^t dx(t)$$

b) integrujeme:

$$v_0\cdot\int_0^t dt + a\cdot\underbrace{\int_0^t t\,dt} = \underbrace{\int_0^t dx(t)}$$

derivace a integrál se navzájem vyruší

$\int t\,dt = \int t^1 dt = \frac{t^2}{2}$

podle vzorce D1' na str. (MF 12)

$$v_0(t-0) + a\cdot\left(\frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = x(t) - x_0$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2} \quad (2.15)$$

Odvodili jsme tedy tytéž vztahy (2.11) a (2.15), jako v oddílu 2.6.

Kouhola 5. Které z funkcí popisují polohu při pohybu rovnoměrně zrychleném?

a) $x(t) = 3t - 4$

b) $x(t) = -5t^3 + 4t^2 + 6$

c) $x(t) = \frac{2}{t^2} - \frac{4}{t}$

d) $x(t) = 5t^2 - 3$

Pro popis polohy $x(t)$ a rychlosti $v(t)$ rovnoměrně zrychleného pohybu jsou tedy důležité rovnice (2.11) a (2.15). V těchto rovnicích se vyskytují 6 hodnot:

$$x_0, v_0, x(t), v(t), t, a.$$

Abychom byli schopni spočítat konkrétní příklad, musíme čtyři ze těchto šesti hodnot znát – po dosazení do (2.11), (2.15) pak dostaneme dvě rovnice o dvou neznámých, které vyřešíme.

<u>Př. 8.</u> (a) Řidič spatří policejní vůz a začne brzdit. Na dráze 88 m zpomalí ze rychlosti 75 km/h na rychlost 45 km/h. Určete konstantu zrychlení (resp. zpomalení) automobilu a dobu brzdění, pokud brzdění bylo rovnoměrné.

I řešení: známe $v_0 = 75\ km \cdot h^{-1} = 20{,}83\ m \cdot s^{-1}$

$v(t) = 45\ km \cdot h^{-1} = 12{,}5\ m \cdot s^{-1}$

$x_0 = 0\ m$ ... počátek soustavy souřadnic umístíme do okamžiku, kdy auto začalo brzdit

$x(t) = 88\ m$

Známé hodnoty dosadíme do rovnic (2.11), (2.15):

$$\begin{cases} 12{,}5 = 20{,}83 + a \cdot t \\ 88 = 0 + 20{,}83 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \end{cases}$$

Tyto 2 rovnice o 2 neznámých vyřešíme např. tak, že z 1. rovnice vyjádříme $\underline{\underline{a}}$ a dosadíme do druhé rovnice:

$$a = \frac{12{,}5 - 20{,}83}{t} = \frac{-8{,}33}{t} \quad \text{... dosadíme do 2. rovnice:}$$

$$88 = 0 + 20{,}83\, t + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-8{,}33)}{\cancel{t}} \cdot t^{\cancel{2}}$$

$$88 = t\left(20{,}83 - \frac{8{,}33}{2}\right)$$

$$88 = t \cdot 16{,}665$$

$$\underline{\underline{5{,}28 = t}}$$

a zpětně vypočteme $\underline{\underline{a}}$: $a = \frac{-8{,}33}{t} = \frac{-8{,}33}{5{,}28} \doteq \underline{\underline{-1{,}58\ m \cdot s^{-2}}}$

Automobil při konstantním zrychlení $a = -1{,}58$ snížil rychlost ze 75 km/h na 45 km/h za 5,28 s.

(b) Řidič dále brzdí se stejným zrychlením $a = -1{,}58\ m \cdot s^{-2}$. Za jak dlouho od začátku brzdění se automobil zcela zastaví a jakou celkovou dráhu od začátku brzdění ujede do úplného zastavení?

[řešení: známe $x_0 = 0$ ... stejný bod jako v (a)

$v_0 = 75\ km \cdot h^{-1} = 20{,}83\ m \cdot s^{-1}$

$v(t) = 0\ m \cdot s^{-1}$ ... řidič zcela zastaví

$a = -1{,}58\ m \cdot s^{-2}$

Známé hodnoty dosadíme do rovnic (2.11), (2.15):

$$\left[\begin{array}{l} 0 = 20{,}83 - 1{,}58 \cdot t \\ x(t) = 0 + 20{,}83 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 1{,}58 \cdot t^2 \end{array}\right.$$

Vidíme, že z první rovnice můžeme hned vypočítat $\underline{\underline{t}}$ a dosadit do druhé rovnice:

$$t = \frac{20{,}83}{1{,}58} = \underline{\underline{13{,}18\ s}}$$

dosadíme: $x(13{,}18) = 20{,}83 \cdot 13{,}18 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}58 \cdot 13{,}18^2 = \underline{\underline{137{,}31\ m}}$

Řidič zcela zastaví za 13,18 sekund od začátku brždění a urazí přitom dráhu 137,31 metrů.

(c) Při další jízdě řidič opět potřebuje zastavit. Zpomaluje s konstantním zrychlením $a = -1{,}58\ m \cdot s^{-2}$ a úplně zastaví na dráze 200 m. Počáteční rychlost v_0 neznáme. Jak dlouho trvalo brždění?

[řešení: známe $x_0 = 0\ m$ ... zde volíme počátek soustavy souřadnic

$x(t) = 200\ m$

$v(t) = 0\ m \cdot s^{-1}$

$a = -1{,}58\ m \cdot s^{-2}$

Známé hodnoty dosadíme do vztahů (2.11), (2.15):

$$\left[\begin{array}{l} 0 = v_0 - 1{,}58 \cdot t \\ 200 = 0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 1{,}58 \cdot t^2 \end{array}\right.$$

Tyto dvě rovnice o dvou neznámých vyřešíme např. tak, že z první rovnice vyjádříme v_0 a dosadíme do druhé rovnice:

$$v_0 = 1{,}58 \cdot t$$

dosadíme: $200 = 1{,}58 \cdot t^2 - \frac{1{,}58}{2} \cdot t^2$

$$200 = t^2 \left(1{,}58 - \frac{1{,}58}{2}\right)$$

$$200 = t^2 \cdot 0{,}79$$

$$\frac{200}{0{,}79} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{200}{0{,}79}} = \underline{\underline{15{,}91\ s}}$$

Brždění nyní trvalo 15,91 sekund.

(eventuálně jsme nyní schopni určit i v_0: dosazením do první rovnice je $v_0 = 1{,}58 \cdot 15{,}91 = 25{,}1378\ m s^{-1} = 90{,}5\ km \cdot h^{-1}$)

Poznámka

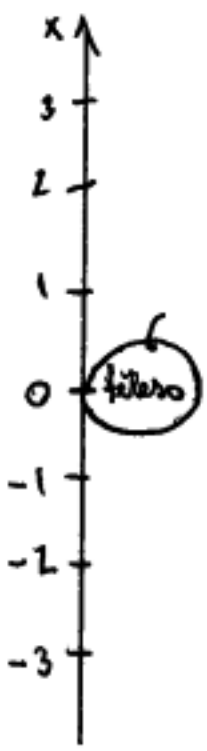
1) Pokud se chceme ujistit, že jsme odvodili dobře danou rovnici, můžeme provést tzv. rozměrovou zkoušku = ověřit, zda každý člen rovnice má stejný rozměr.
Například u rovnice $x - x_0 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ je levá strana v metrech,
a také $v_0 \cdot t$ má jednotku $m \cdot s^{-1} \cdot s = m$
$\frac{1}{2} a \cdot t^2$ má jednotku $m \cdot s^{-2} \cdot s^2 = m$,
čili i na pravé straně rovnice sčítáme veličiny stejného rozměru (tedy v metrech).
Rozměrová zk. tedy ověřuje, že každý člen dosazovaný do rovnice má stejný fyzikální rozměr.

2.8. Svislý vrh

- Zabýváme se nyní chvíli popisem jistého rovnoměrně zrychleného pohybu, kterému se říká svislý vrh ... jisté těleso vrháme svisle vzhůru, nebo svisle dolů; přitom při popisu pohybu zanedbáme vliv odporu prostředí (např. odpor vzduchu...)
- Zvláštním případem svislého vrhu je volný pád ... vrh tělesa svisle dolů s nulovou počáteční rychlostí (= prostě to těleso volně pustíme z ruky a ono padá)
- Ve skutečnosti je vliv odporu vzduchu důležitý. Kdybychom pustili ze stejné výšky jablko a pírko ve vakuu (= je vyčerpán vzduch), padají stejně rychle. V běžné atmosféře pírko padá pomaleji než jablko, protože vzduchový odpor u pírka je větší.

Zatím se při popisu svislého vrhu omezíme na zanedbání odporu vzduchu. Přesné výpočty s odporovou silou provedeme až v kapitole 6, která se více zabývá působením sil na těleso.

- V tomto oddílu budeme uvažovat pouze sílu gravitační, která pohyb padajícího tělesa neustále zrychluje a udílí mu tzv. tíhové zrychlení $g = 9{,}80665\ m \cdot s^{-2}$ (viz (2.10)).



- Při popisu svislého vrhu je důležité se domluvit na orientaci osy x, podél které těleso vrháme.

Počátek souřadné osy umístíme zpravidla do místa, odkud těleso vrháme. Kladný směr osy x budeme uvažovat svisle vzhůru, záporný směr osy x svisle dolů.
Budeme tak dělat vždy, ať už těleso z polohy 0 vrháme nahoru, nebo dolů, aby v tom nebyl zmatek. Ale má to svou logiku...
kladné hodnoty polohy se budou vyskytovat nad počáteční úrovní polohy, záporné hodnoty pod počáteční úrovní polohy.

• Vzhledem k orientaci svislé osy x vlastní gravitační síla působí v záporném směru, udílí tedy tělesu konstantní zrychlení $a = -g$. Pak rovnice popisující tento rovnoměrně zrychlený pohyb můžeme psát ve tvaru

$$v(t) = v_0 - g \cdot t \qquad (2.11)'$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (2.15)'$$

<u>Př. 9.</u> Opravář upustil klíč do výtahové šachty vysokého domu (jedná se o volný pád).

(a) Jaká bude poloha klíče za 1,5 s?

[řešení: známe $x_0 = 0$ m ... počátek souřadné soustavy volíme v bodě puštění klíče

$v_0 = 0$ m·s^{-1} ... opravář klíč volně upustil, nikoliv jím mrštil

$a = -g = -9{,}80665$ m s^{-2}

$t = 1{,}5$ s

chceme určit $x(1{,}5)$ ... dosadíme do vzorce $(2.15)'$:

$x(1{,}5) = 0 + 0 \cdot 1{,}5 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}80665 \cdot 1{,}5^2 \doteq \underline{\underline{-11 \text{ m}}}$]

(b) Jaká bude rychlost klíče v okamžiku $t = 1{,}5$ s?

[řešení: využijeme vztah $(2.11)'$:

$v(1{,}5) = 0 - 9{,}80665 \cdot 1{,}5 \doteq \underline{\underline{-14{,}7 \text{ m·s}^{-1}}}$

Rychlost je záporná, protože klíč padá v záporném směru osy x.]

Podobně lze určit hodnoty veličin pro okamžiky $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$:

• $t = 0$: $x = 0$ m, $v = 0$ m s^{-1}, $a = -9{,}80665$ m s^{-2}

• $t = 1$: $x = -4{,}9$ m, $v = -9{,}80665$ m s^{-1}, $a = -9{,}80665$ m s^{-2}

• $t = 2$: $x = -19{,}6$ m, $v = -19{,}6$ m s^{-1}, $a = -9{,}80665$ m s^{-2}

• $t = 3$: $x = -44{,}1$ m, $v = -29{,}4$ m s^{-1}, $a = -9{,}80665$ m s^{-2}

• $t = 4$: $x = -78{,}5$ m, $v = -39{,}2$ m s^{-1}, $a = -9{,}80665$ m s^{-2}

Př. 10. (podle události z roku 1939). Hráč baseballu se pokouší překonat rekord v chytání baseballového míčku při pádu z co největší výšky. Z vrtulníku byl z výšky 240 m upuštěn míček (odpor vzduchu zanedbáme při popisu).

(a) Určete dobu letu míčku.

[řešení: zvolíme $x_0 = 0\,m$ ... umístíme do bodu upuštění míčku

$x(t) = -240\,m$ ... při dopadu se míček dostal 240 m „pod úroveň" 0.

$a = -g = -9{,}80665\ m \cdot s^{-2}$

$v_0 = 0\ ms^{-1}$

Dosadíme do rovnice (2.15):

$$-240 = 0 + 0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}80665 \cdot t^2$$

$$48{,}95 = t^2$$

$$\pm 7 = t$$ ... zajímá nás řešení $\underline{t = 7\,s}$, protože míček dopadl poté, co byl vypuštěn]

(b) Jaká byla rychlost míčku při dopadu?

[řešení: Dosadíme $t = 7\,s$ do rovnice (2.11):

$$v(7) = 0 - 9{,}80665 \cdot 7 = \underline{-68{,}65\ ms^{-1}}$$]

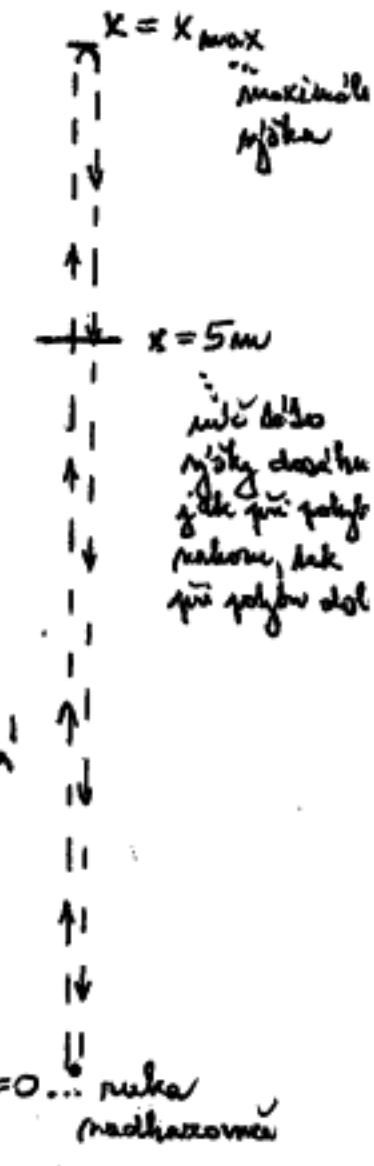
(ve skutečnosti byla rychlost míčku vlivem odporu vzduchu menší, ale i tak byl náraz tak ohromný, že ruka s rukavicí hráče udeřila do hráče, zlomila mu horní čelist na dvanácti místech a vyrazila pět zubů ... hráč upadl do bezvědomí)

Př. 11. Nadhazovač vyhodí baseballový míč svisle vzhůru rychlostí $12\ ms^{-1}$.

(a) Za jak dlouho dosáhne míč maximální výšky?

(b) Jaká je maximální výška letu?

(c) Za jak dlouho po vyhození dosáhne míč výšky 5 m?



[řešení: Situace (a), (b) popisují jednu pozici letu míčku (pozici v maximální výšce), proto je budeme řešit najednou.

Zvolíme $x_0 = 0$ ... poloha míčku, když opouští ruku nadhazovače

$v_0 = 12\ ms^{-1}$

$v(t) = 0\ ms^{-1}$ ... v nejvyšším bodě je rychlost míčku nulová

$a = -g = -9{,}80665\ ms^{-2}$ ... jako vždy u svislého vrhu

Dosadíme do rovnic (2.11), (2.15):

$$\begin{cases} 0 = 12 - 9{,}80665 \cdot t \\ x(t) = 0 + 12 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}80665 \cdot t^2 \end{cases}$$

Vidíme, že první rovnici lze hned vyřešit.

Vypočtené t pak dosadíme do druhé rovnice.

$$t = \frac{12}{9{,}80665} = \underline{\underline{1{,}22\ s}}$$

dosadíme do druhé rovnice:

$$x(1{,}22) = 0 + 12 \cdot 1{,}22 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}80665 \cdot 1{,}22^2 = \underline{\underline{7{,}34\ m}}$$

Čili míček vystoupá do výšky 7,34 m za dobu 1,22 s.

<u>ad c</u>: Pokud $x(t) = 5$, určíme t z rovnice (2.15):

$$5 = 0 + 12 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}80665 \cdot t^2 \quad / \text{ převedeme všechny členy na levou stranu}$$

$$\frac{9{,}80665}{2} \cdot t^2 - 12 \cdot t + 5 = 0$$

(vzorec pro řešení kvadratické rovnice $a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$ je

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

tj. $t_{1,2} = \dfrac{+12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}80665 \cdot 5}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}80665} = \dfrac{+12 \pm \sqrt{45{,}9335}}{9{,}80665} \doteq \left\langle \begin{array}{l} \underline{\underline{0{,}53\ s}} \\ \underline{\underline{1{,}91\ s}} \end{array} \right.$

Míček tedy prochází polohou 5 dvakrát ... jednou v okamžiku $t = 0{,}53$ s při letu nahoru, podruhé při letu dolů v okamžiku $t = 1{,}91$ s.]

<u>Kontrola 6</u>: Jaké je znaménko posunutí míče v př. 11 a) při vzestupu míče
b) při jeho pádu?

Jaké je zrychlení v nejvyšším bodě letu?

2.9. Elementární částice

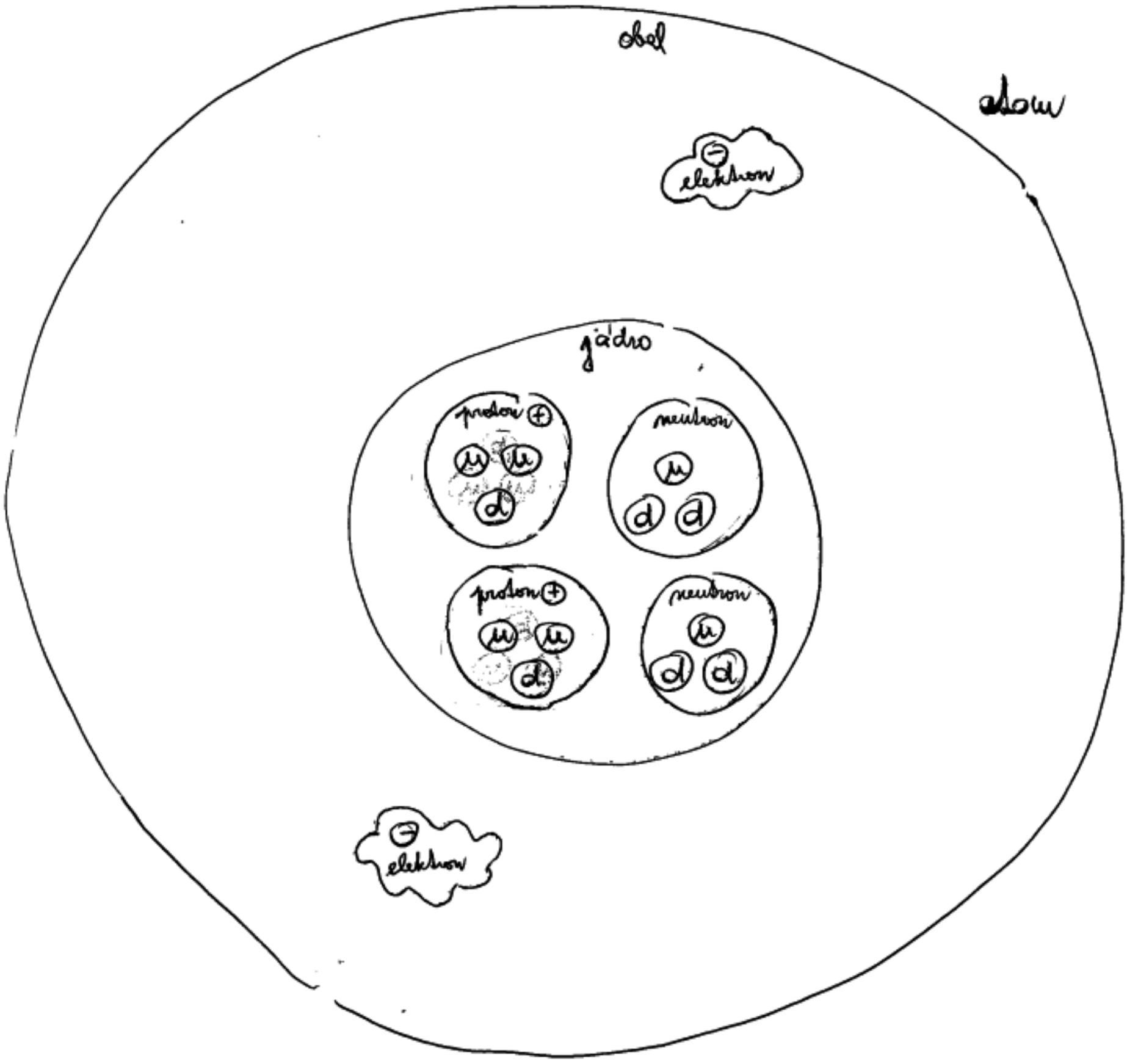
Až dosud jsme se zabývali popisem pohybu auta, míčku, králíka, apod. V historii se lidé pustili také do studia mikrosvěta, tj. světa objektů a částic, které jsou tak malé, že je nelze spatřit pouhým okem.

Položili si otázku, jaká je nejmenší částečka hmoty. Už kolem počátku letopočtu řek Démokritos nazval jisté malé částečky <u>atomy</u> (atomos = nedělitelný).

Později bylo zjištěno, že název „atom" neodpovídá obsahu, protože uvnitř něj existují ještě menší částice: uprostřed atomu je <u>jádro</u>, ve kterém se vyskytují <u>protony</u> a <u>neutrony</u>, kolem jádra se rozprostírá <u>obal</u>, ve kterém se vyskytují <u>elektrony</u>.

Vědci se začali zabývat i zkoumáním těchto malých částeček uvnitř atomu a objevovali další druhy těchto mikročástic tak, že atomy různě rozbíjeli a dívali se do mikroskopů, co tam uvidí.

To, že atom drží pohromadě, je zajištěno vzájemným elektrickým přitahováním kladných protonů (značíme ⊕) a záporných elektronů (značíme ⊖).



Protože protony se svými kladnými náboji odpuzují, jsou potřebné elektricky neutrální neutrony, aby se jádro nerozbilo.

Elektrony (značíme e^-) jsou jedním ze šesti typů tzv. leptonů: (elektron, mion, tauon, neutrino elektron, neutrino mion, neutrino tauon) Ke každému ze leptonů existuje tzv. antičástice. Antičástice k elektronu se nazývá pozitron (značíme e^+).

Podle současných poznatků (2000) se protony a neutrony od leptonů liší tím, že mají opět jistou vnitřní strukturu ... proton nebo neutron se každý skládají ze tří tzv. kvarků

neutron = D + D + U

proton = D + U + U

Byly objeveny kvarky šesti typů:

D = down (dole)
U = up (nahoře)
C = charm (půvabný)
S = strange (podivný)
T = top (vrchol)
B = bottom (spodek)

Ke každému ze šesti typů kvarků existuje antičástice.

Fyzikové se zajímali o rozdělení atomů do různých skupin – tak vznikly chemické prvky (různé prvky se liší počtem protonů v jádře) → viz periodická soustava prvků

U každého prvku pak existují tzv. izotopy (různé izotopy téhož prvku se liší počtem neutronů v jádře)

K některým otázkám souvisejícím s uvedenými částicemi mikrosvěta se ještě vrátíme.

Otázky k opakování

Kapitola 2: Přímočarý pohyb

1. Co je to kinematika?
2. Co je to hmotný bod?
3. Kdy můžeme při popisu pohybu těleso nahradit hmotným bodem?
4. Co je to poloha hmotného bodu?
5. Co je to posunutí? Jak se vypočítá? (2.1)
6. Co je to průměrná rychlost? Jak se vypočítá? (2.2)
7. Co je to sečna?
8. Co to jsou podobné trojúhelníky?
9. Co je to odvěsna a co přepona?
10. Jak se v pravoúhlém trojúhelníku definuje $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$?
11. Dokažte vztah $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
12. Co je to rovnice přímky ve směrnicovém tvaru?
13. Jaký je význam konstanty $\underline{\underline{b}}$ v rovnici přímky?
14. Co je to směrnice přímky a jaký je její geometrický význam?
15. Jaký je vztah mezi průměrnou rychlostí a směrnicí přímky?
16. Co je to průměrná absolutní rychlost? Jak se vypočítá? (2.3)
17. Co je to okamžitá rychlost a jak se vypočítá? (2.4)
18. Jak se čte výraz $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$?
19. Jak se čte výraz $\frac{dx(t)}{dt}$?
20. Co je to tečna?
21. Jaký je vztah mezi okamžitou rychlostí a směrnicí přímky?
22. Co je to derivování? (nakreslete obrázek pro obecný bod t ... $F(t)$, $f(t)$)
23. Co je to integrování? Co je to neurčitý integrál?
24. Jaký je fyzikální význam derivace funkce $F(t)$ v bodě t?
25. Jaký je geometrický význam derivace funkce $F(t)$ v bodě t?
26. Jaký je algebraický význam derivace funkce $F(t)$ v bodě t?
27. Pomocí limity vypočtěte derivaci funkce $F(t) = \frac{1}{t}$
28. Jaká je derivace funkcí $F_1(t) = c$, $F_2(t) = t^n$? (D0), (D1)
28. Jaký je neurčitý integrál z funkce $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = t^{n-1}$? (D0', D1')

29. Jak se čte výraz $\int_a^b f(t)\,dt$ a co udává? (obrázek) (geometrický význam určitého integrálu)

30. Jak se vypočte $\int_a^b f(t)\,dt$ pomocí limity? (obrázek) (algebraický význam určitého integrálu)

31. Jaký je vztah mezi určitým a neurčitým integrálem?
(tzv. Newton – Leibnizova formule) (2.5)

32. Jaký je fyzikální význam Newton–Leibnizovy formule? (fyzikální význam určitého integrálu)

$$\left[\, x(t) - x(0) = \int_0^t v(u)\,du \,\right] \quad (2.6)$$

---

33. Co je to průměrné zrychlení a jak se spočítá? (2.7)

34. Co je to okamžité zrychlení a jak se spočítá? (2.8)

35. Jaký je vztah mezi okamžitým zrychlením $a(t)$ a, potažmo $x(t)$? (2.9)

36. Jaká je jednotka rychlosti a jednotka zrychlení?

37. Co to je rovnoměrné tíhové zrychlení a čemu se rovná? (2.10)

38. Znamená záporné zrychlení vždy zpomalení? (poučka str. MF 20)

---

39. Co je to rovnoměrně zrychlený pohyb a kolik veličin (hodnot) vystupuje při jeho popisu?

40. Odvoďte rovnice pro popis rovnoměrně zrychleného pohybu –
– bez užití diferenciálního počtu (rovnice 2.11. až 2.15)

41. Odvoďte rovnice (2.11) a (2.15) užitím diferenciálního a integrálního počtu

[a) definiční vztah pro zrychlení zintegrujeme od 0 do t podle (2.5):

$$a = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow a(t-0) = v(t) - v_0 \Rightarrow v(t) = v_0 + at \quad (2.11)$$

b) do definičního vztahu pro rychlost dosadíme (2.11) a zintegrujeme od 0 do t:

$$v_0 + a\cdot t = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow v_0(t-0) + a\left(\frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = x(t) - x_0$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0\cdot t + \frac{1}{2}at^2 \quad (2.15)\,]$$

42. Co ověřuje rozměrová zkouška?

43. Co je to svislý vrh a volný pád?
44. Jak volíme souřadnici osy x při svislém vrhu?
45. Jaké jsou rovnice pro $x(t)$, $v(t)$ při svislém vrhu? (2.11', 2.15')

46. Jaká je struktura atomu?
47. Jak se liší atomy různých chemických prvků?
48. Co je to izotop?
49. Jaké známe druhy kvarků?
50. Jaké známe druhy leptonů?
51. Co je to pozitron?

Přehled cvičení ke kapitole 1 a kapitole 2

F1. Převody jednotek

M1. Goniometrická funkce ostrého úhlu

M2. Rovnice přímky

F2. Průměrná rychlost

M3. Derivace

F3. Okamžitá rychlost

F4. Zrychlení

F5. Rovnoměrně zrychlený pohyb

F6. Vrh svislý

Kapitola 3 : Vektory

? Speleologové se pohybují v jeskyni. Lze nějak jednoduše charakterizovat vzájemnou polohu startu a cíle jejich cesty, aniž bychom podrobně popisovali celou spletitou trasu?

3.1. Vektorové veličiny (= vektory)

Velké množství fyzikálních veličin jsou tzv. vektorové veličiny ... to jsou veličiny určené dvěma faktory – velikostí
– směrem

Tyto vektorové veličiny můžeme dobře znázornit šipkou, která zachycuje oba faktory – velikost veličiny je rovna délce šipky
– šipka je umístěna ve směru, ve kterém daná veličina působí

Vektorovou veličinu budeme označovat šipkou nad jejím písmenem

Příkladem vektorové veličiny je

a) posunutí v prostoru ... veličina, která popisuje přesun částice v prostoru z bodu A do bodu B; lze ji znázornit šipkou:

velikost šipky = vzdálenost mezi body A, B
směr šipky udává, že došlo k přesunu částice z bodu A do bodu B
(vektor posunutí značíme $\vec{\Delta r}$)

b) rychlost pohybu částice nebo tělesa v prostoru ... lze ji znázornit šipkou:
velikost (= délka) šipky udává velikost rychlosti v daném okamžiku
(velikost rychlosti značíme $\vec{v}$)
směr šipky = směr, ve kterém se v daném okamžiku částice pohybuje

c) síla působící na těleso ... lze ji znázornit šipkou:
velikost šipky = velikost působící síly
směr šipky = směr, ve kterém síla na těleso působí
(vektor síly značíme $\vec{F}$)

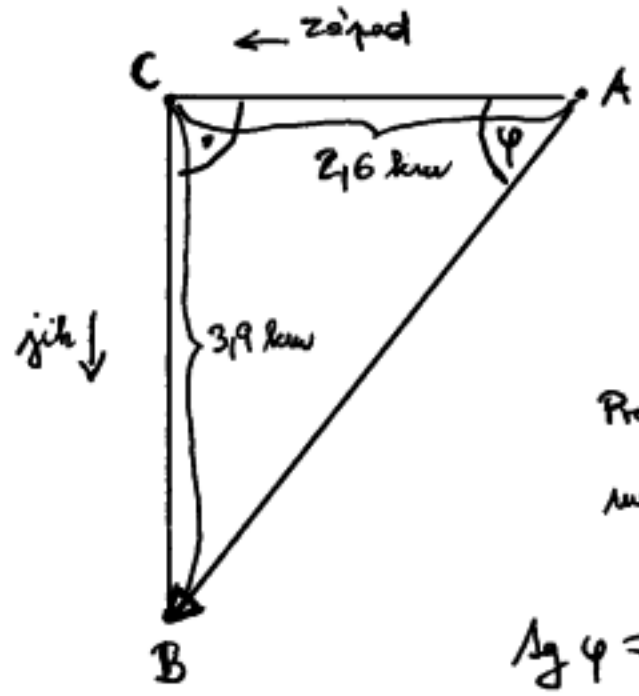
V průběhu této kapitoly a v dalším studiu fyziky se seznámíme ještě s mnohými dalšími vektorovými veličinami.

Mnohé fyzikální veličiny naopak vektorové nejsou, protože jim nelze přiřadit žádný směr (např. teplota, hmotnost, ...). Veličinám, které jsou jednoznačně určeny pouze velikostí (a nikoli směrem), říkáme skalární veličiny (= skaláry). Těch je taky hodně.

Př. 12. Skupina speleologů, která v roce 1972 objevila spojení mezi Mammutí jeskyní a jeskynním systémem Flint Ridge, šla od Austinova vstupu 2,6 km západním směrem, 3,9 km na jih a vystoupila o 25 m svisle výše.

Jaký vektor posunutí odpovídá této cestě?

[řešení: Nejprve zjistíme velikost posunutí se vodorovném (= horizontálním) směru:



Z pravoúhlého trojúhelníka ABC můžeme určit délku |AB| pomocí Pythagorovy věty:

$$|AB| = \sqrt{2{,}6^2 + 3{,}9^2} \doteq \underline{\underline{4{,}68722}}\ \text{km}$$

Pro přesný popis je užitečné zjistit také úhel φ mezi západním směrem a směrem vektoru $\vec{AB}$:

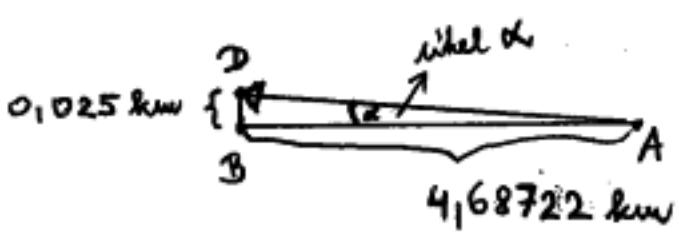
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{3{,}9}{2{,}6} = 1{,}5$$

Z rovnice $\operatorname{tg}\varphi = 1{,}5$ určíme „inverzním procesem" úhel φ:

$$\varphi = \operatorname{arctg} 1{,}5 \doteq \underline{\underline{56{,}3^\circ}}$$

↑ kalkulačka musí být přepnuta na DEG (degrees = anglicky „stupně"), aby byl výsledek ve stupních

Z bočního pohledu určíme svislé (= vertikální) posunutí:



△ ADB je také pravoúhlý, tj.

$$|AD| = \sqrt{0{,}025^2 + 4{,}68722^2} = \underline{\underline{4{,}68729}}\ \text{km}$$

Pro přesný popis je užitečné zjistit také úhel stoupání:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}025}{4{,}68722} = 0{,}0053$$

Tedy $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}0053 \doteq \underline{\underline{0{,}3^\circ}}$

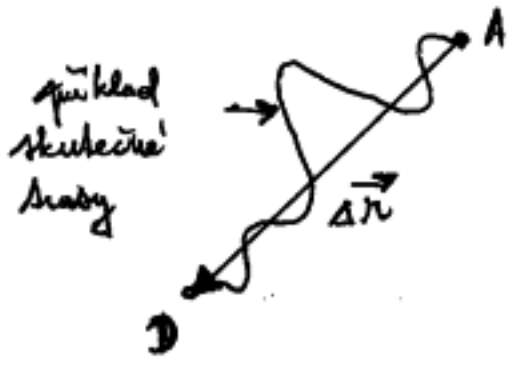
kalkulačka přepnuta na DEG

Můžeme tedy uvést celkový popis posunutí: vektor posunutí $\vec{\Delta r}$ má – velikost $|\vec{\Delta r}| = |AD| = 4{,}68729$ km

– směr se směrem „jihozápad → západ" úhel $\varphi = 56{,}3^\circ$

a od vodorovné roviny je odkloněn směrem vzhůru o úhel $\alpha = 0{,}3^\circ$]

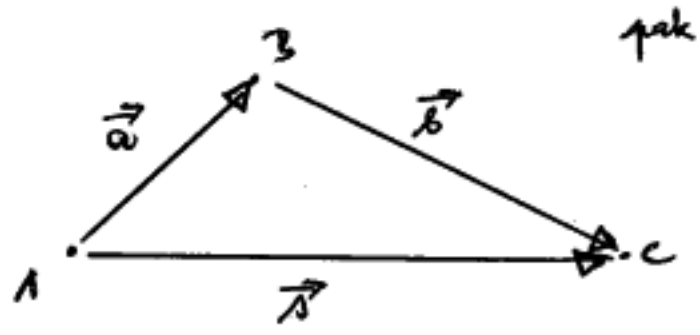
Nutno dodat, že vektor posunutí $\vec{\Delta r}$ v předchozím příkladu nemusí přesně popisovat skutečnou trasu cesty. Vektorem je zadán pouze vztah mezi počáteční a koncovou polohou cesty – její skutečná trasa mohla být „klikatější".



3.2. Sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem – grafický přístup

a) Sčítání vektorů

Uvažujme částici, která se pohybuje nejprve z bodu A do bodu B, a pak z bodu B do bodu C (viz obrázek):



pak vektor celkového posunutí $\vec{s}$ je dán součtem vektorů dílčích posunutí $\vec{a}, \vec{b}$.

Vztah mezi vektory zapisujeme tzv. vektorovou rovnicí

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{s}} \qquad (3.1).$$

Uvedený obrázek je současně i návodem, jak sečíst vektory $\vec{a}, \vec{b}$ graficky:

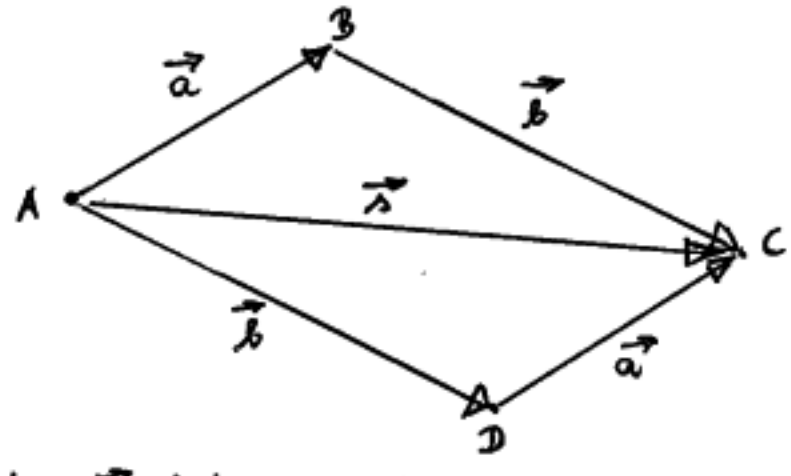
1. nakreslíme vektor $\vec{a}$ ve správné velikosti a směru
2. vykreslíme vektor $\vec{b}$ tak, aby jeho počáteční bod byl současně i koncovým bodem vektoru $\vec{a}$
3. výsledný vektor $\vec{s}$ součtu je spojnicí počátečního bodu vektoru $\vec{a}$ s koncovým bodem vektoru $\vec{b}$.

Právě definovaný součet vektorů má 4 důležité vlastnosti:

(1) Komutativní zákon: výsledek součtu vektorů nezávisí na pořadí sčítanců, tj.

$$\boxed{\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}} \qquad (3.2)$$

o platnosti tohoto pravidla se lze přesvědčit graficky (z obrázku):



stejný vektor $\vec{s}$ dostaneme, pokud nejprve z bodu A nakreslíme vektor $\vec{a}$ + pak z jeho koncového bodu B přidáme vektor $\vec{b}$;

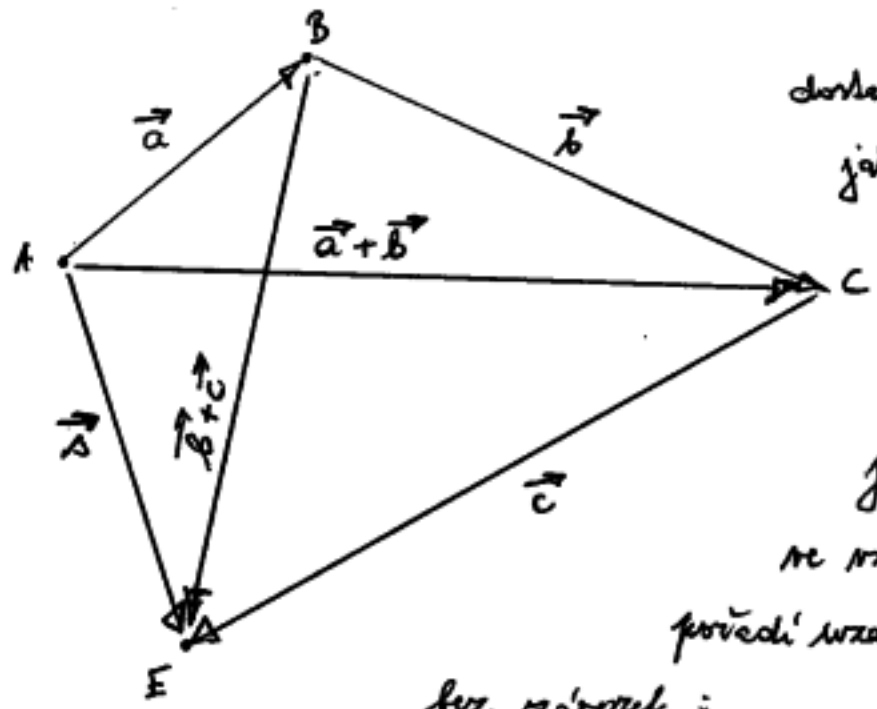
nebo pokud nejprve z bodu A nakreslíme vektor $\vec{b}$ + pak z koncového bodu D přidáme vektor $\vec{a}$.

(uvedenému pravidlu se někdy říká pravidlo rovnoběžníka, protože počáteční a koncové body A, B, C, D vytvářejí rovnoběžník)

(2) Asociativní zákon: při sčítání více než dvou vektorů nezáleží na pořadí, v jakém jednotlivé operace „součtu dvou dílčích vektorů" provádíme, neboli

$$\boxed{(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})}. \qquad (3.3)$$

o platnosti zákona se lze opět přesvědčit z grafického náčrtu:



když sčítáme nejprve $\vec{a}+\vec{b}=\vec{AC}$, a pak $\vec{AC}+\vec{c}=\vec{s}$, dostaneme stejný výsledek jako v případě, kdy sčítáme nejprve $\vec{b}+\vec{c}=\vec{BE}$, a pak $\vec{a}+\vec{BE}=\vec{s}$

Jinými slovy, protože se vztahu (3.3) nezáleží na provedení uzávorkování, lze psát součet $\vec{s}$ bez závorek:

$$\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

(3) Tedy zřejmě se zdá, že sčítání vektorů splňuje některá základní pravidla stejná pro sčítání mezi už známých reálných čísel. To není nikoc samozřejmá věc – v matematice a fyzice existují i operace, u kterých neplatí některé vlastnosti, které jsou u klasického sčítání splněny.

Nyní zkoumejme podobnost sčítání vektorů a sčítání čísel dále: u reálných čísel existuje číslo 0, které po přičtení k jinému číslu výsledek nezmění. Platí něco podobného i u vektorů?

Ano – u vektorů zavádíme tzv. nulový vektor $\vec{o}$, jehož
- velikost je rovna 0
- směr není definován!!

Z hlediska vektorové veličiny posunutí je nulový vektor celkem logický: posunutí je rovno nulovému vektoru, pokud jeho koncový bod je roven počátečnímu bodu

Nulový vektor má tedy mezi vektory stejné postavení jako nula mezi čísly:

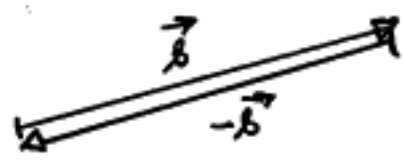
$$\vec{b} + \vec{o} = \vec{b}.$$

(4) U čísel ke každému reálnému a existuje číslo $(-a)$ tak, že $a+(-a)=0$. Platí něco podobného i u vektorů? Ano.

Ke každému vektoru $\vec{b}$ existuje vektor $-\vec{b}$, který má
- stejnou velikost
- opačný směr

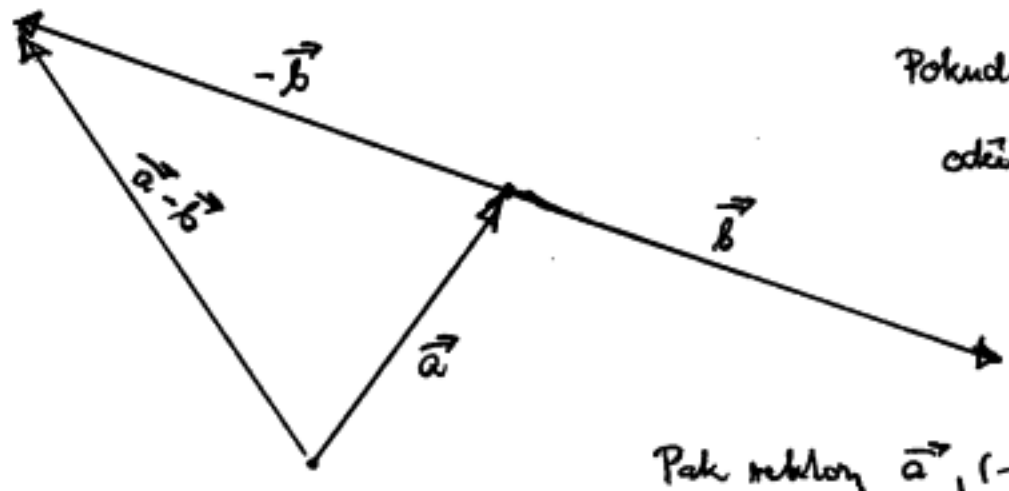
Tomuto vektoru $(-\vec{b})$ se říká opačný vektor k vektoru $\vec{b}$ a platí

$$\vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{o}.$$



Existenci opačného vektoru užijeme k definici operace odčítání vektorů:
Rozdílem vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ označujeme vektor

$$\boxed{\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})} \quad . \qquad (3.4)$$



Pokud tedy máme realizovat odčítání $\vec{a}-\vec{b}$, nakreslíme vektor $(-\vec{b})$ tak, aby počáteční bod $-\vec{b}$ byl koncovým bodem $\vec{a}$.

Pak vektory $\vec{a}, (-\vec{b})$ sečteme graficky, jak už to známe

Kontrola 1. Dvě posunutí $\vec{a}$, $\vec{b}$ mají velikosti $|\vec{a}| = 3\,m$, $|\vec{b}| = 4\,m$. Označme $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Jak je třeba volit úhel obou posunutí, aby velikost vektoru $\vec{c}$ byla a) co největší?

b) co nejmenší? V obou případech určete velikost vektoru $\vec{c}$.

Př. 13. Při hromadném závodě je úkolem soutěžícího vzdálit se co možná nejvíce od startu součtem tří postupných přímočarých přesunů:

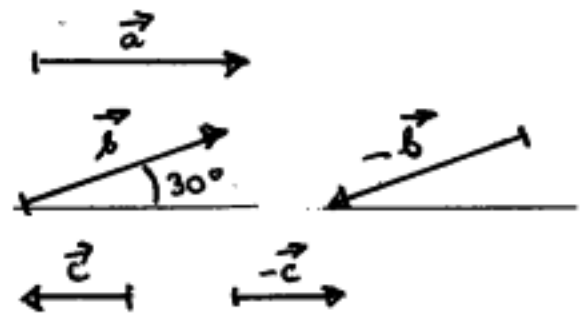
a) přesun $\vec{a} = 2\,km$ na východ

b) přesun $\vec{b} = 2\,km$ severovýchodně pod úhlem $30°$ k místní rovnoběžce

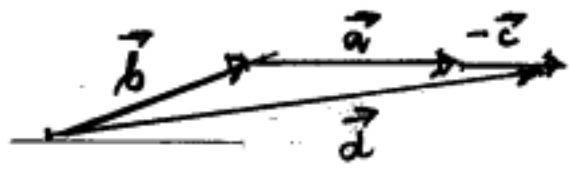
c) přesun $\vec{c} = 1\,km$ na západ

Pořadí přesunů může závodník volit a kterýkoliv z přesunů $\vec{b}$, $\vec{c}$ může vyměnit přesunem opačným. Do jaké největší vzdálenosti od startu se lze tímto způsobem dostat?

[řešení: Ve vhodném měřítku (1 km odpovídá jednomu cm) nakreslíme vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $-\vec{b}$, $-\vec{c}$:



Vektor $\vec{a}$ nás navádí k tomu, abychom „se vydali" co nejdále východním směrem:

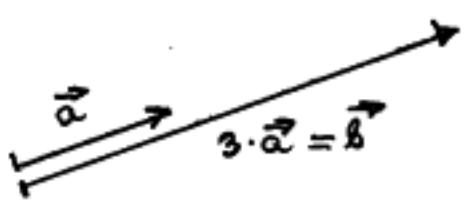


dostáváme vektor $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a} - \vec{c}$, na pořadí a uzávorkování sčítanců přitom podle vlastností (1), (2) nezáleží.

Změříme-li délku vektoru $\vec{d}$ z obrázku, dostaneme $|\vec{d}| = 4{,}8\,km$.]

b) Násobení vektoru skalárem

Představte si, že částice $č_2$ je třikrát rychlejší než částice $č_1$. Obě částice se pohybují stejným směrem. Pak za časový interval Δt dojde k posunutí částice $č_1$ o vektor $\vec{a}$, $č_2$ o vektor $\vec{b}$



a mezi vektory je vztah $\vec{b} = 3 \cdot \vec{a}$ (viz obrázek).

Z tohoto příkladu pozorně je možné vypozorovat vlastnosti násobení vektoru číslem (= skalárem):

- směr vektoru $\vec{b} = \text{číslo} \cdot \vec{a}$ je – stejný jako směr $\vec{a}$, pokud číslo je kladné
  – opačný než $\vec{a}$, pokud číslo je záporné
- velikost vektoru $\vec{b} = \text{číslo} \cdot \vec{a}$ je rovna $\underbrace{|\text{číslo}|}_{\text{absolutní hodnota čísla}} \cdot \underbrace{|\vec{a}|}_{\text{velikost vektoru } \vec{a}}$,

Násobit vektor nulou moc nemá smysl, ale aby bylo spravedlivosti učiněno zadost, budiž řečeno, že $0 \cdot \vec{b} = \underbrace{\vec{0}}_{\text{nulový vektor}}$.

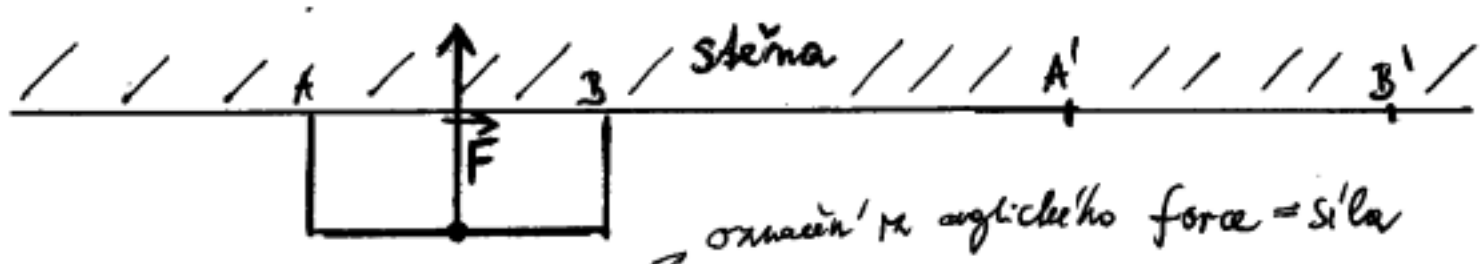
3.3. Rozklad vektoru na součet

V předchozím oddíle jsme se zabývali zejména operací součtu dvou vektorů – byly zadány dva vektory a naším úkolem bylo nalézt vektor, který je jejich součtem. Nyní se budeme zabývat postupem v jistém smyslu opačným – je zadán jeden vektor a naším úkolem je nalézt jiné dva vektory tak, že zadaný vektor je jejich součtem. Této operaci se říká rozklad vektoru $\vec{v}$ na součet vektorů $\vec{a}, \vec{b}$:

pro daný vektor $\vec{v}$ hledáme vektory $\vec{a}, \vec{b}$, aby platilo $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$.

Čtenář nyní určitě požaduje vysvětlení na otázku, v jaké situaci potřebujeme hledat vektory $\vec{a}, \vec{b}$, když už známe jejich součet $\vec{v}$. Nuže:

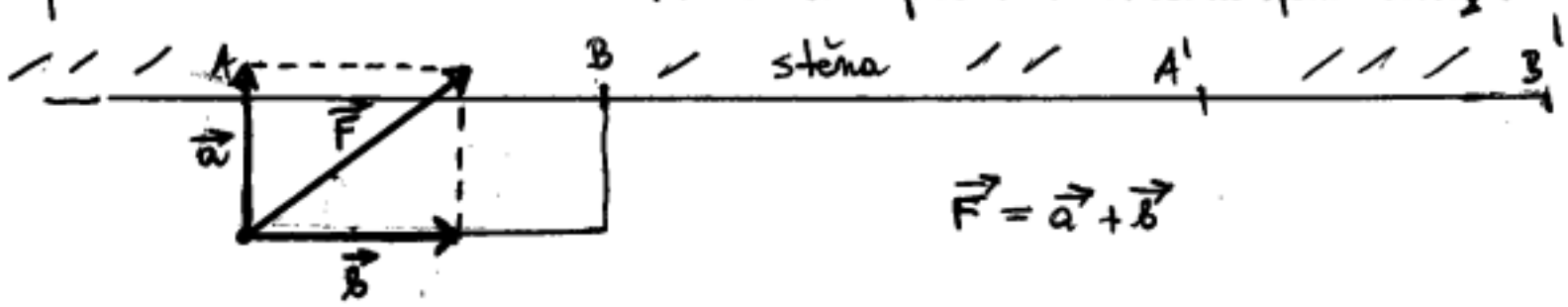
Představte si, že potřebujete posunout skříň podél stěny asi o 3 metry dále, než se zrovna nachází (chcete prostor jarní úklid za skříní). Nevadí vám, že se trochu poškrábe linoleum, na skříň chcete působit jen tím, že na ni



označení z anglického force = síla

budete vztahem tlačit. A teď mi řekněte, co se stane, když budete skříň (jako na obrázku) tlačit silou F kolmo ke zdi? Ano, správně – ať působíte proti stěně silou jakkoli velkou, skříň se nepohne podél stěny ani o centimetr. Maximálně dosáhnete toho, že se dvířka skříně prohnou směrem dovnitř a konečně jarního úklidu můžete ještě slepovat skříň. Zkouška a dobře,

práce vykonaná při posunutí skříně je nulová. Každý jistě chápe, že aby skříň posunul z bodu A do bodu A', musí síla působit tak bodu podél stěny.



$$\vec{F} = \vec{a} + \vec{b}$$

Uvažujme situaci na dalším obrázku: síla působí v šikmém směru na roh skříně. Sílu $\vec{F}$ lze chápat jako výslednici dvou sil $\vec{a}, \vec{b}$, kde

$\vec{a}$ ... síla hloupého pomocníka, který nevykoná žádnou práci

$\vec{b}$ ... síla chytrého pomocníka, který působí v tom nejvhodnějším směru

Řekněme, že síla $\vec{F}$ je konstantní po celou dobu posunutí skříně z A do A'.

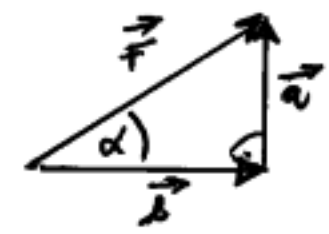
! [Práci potřebnou na posunutí skříně vypočteme jako součin délky posunutí a velikosti síly působící ve směru posunutí:

označení z anglického work = práce

$$\boxed{W = |\vec{AA'}| \cdot |\vec{b}|.} \qquad (3.5)$$

To je tedy důvodem rozkladu vektoru $\vec{F}$: nezajímá nás ani tak přímo síla $\vec{F}$, ani nás moc nezajímá vektor $\vec{a}$ (protože jím vykonaná práce je nulová), ale hlavně nás zajímá vektor $\vec{b}$, protože pomocí něj výslednou práci vypočteme.

Překreslíme ještě všechny tři vektory jednou do obrázku:

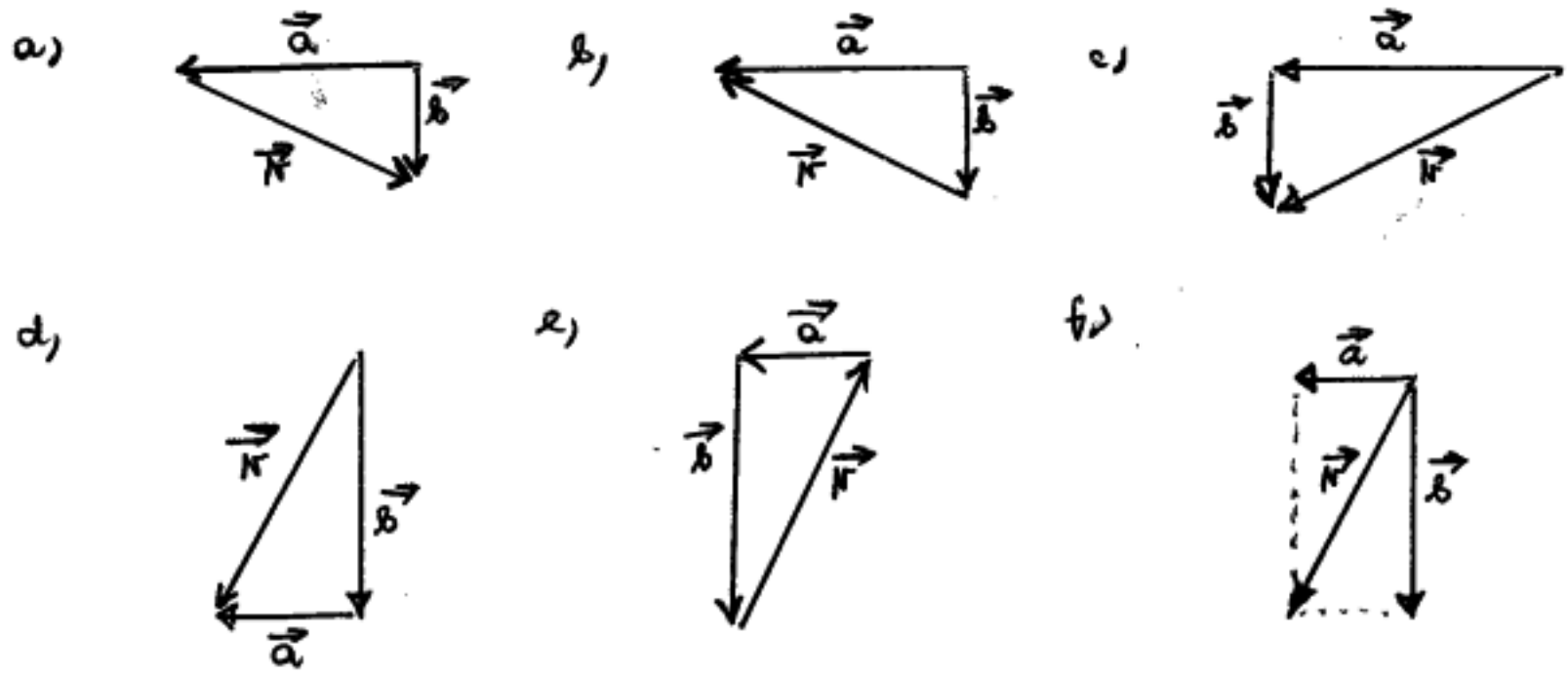


je užitečné vzpomenout si několika věcí:

- většinou potřebujeme, aby vektory $\vec{a}, \vec{b}$ byly navzájem kolmé
- z pravoúhlého trojúhelníka lze vyjádřit velikosti vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ pomocí vektoru $\vec{F}$:

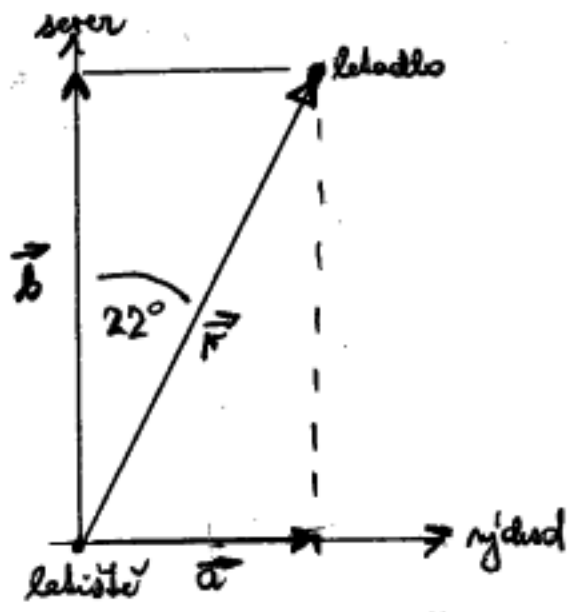
$$\boxed{|\vec{a}| = |\vec{F}| \cdot \sin\alpha, \quad |\vec{b}| = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha} \qquad (3.6)$$

Kontrola 2. Který z následujících obrázků představuje správný rozklad vektoru $\vec{F}$ na součet vektorů $\vec{a}, \vec{b}$?



Př. 14. Malé letadlo odstartovalo za nevlídného počasí. Později bylo spatřeno ve vzdálenosti 215 km od letiště v severovýchodním směru, svírajícím s místním poledníkem úhel 22°. Jaká byla jeho vzdálenost od letiště v severním směru a vzdálenost od letiště ve východním směru?

[řešení:



$|\vec{r}| = 215$ km

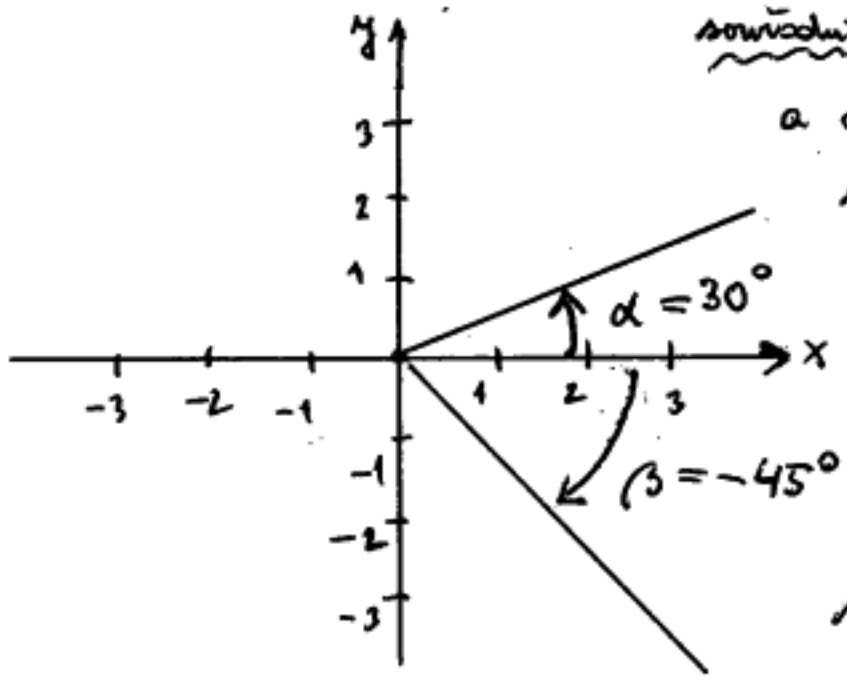
„severní" vzdálenost $= |\vec{b}| = |\vec{r}| \cdot \cos 22° \doteq \underline{\underline{199{,}3 \text{ km}}}$

„východní" vzdálenost $= |\vec{a}| = |\vec{r}| \cdot \sin 22° = \underline{\underline{80{,}5 \text{ km}}}$

]

Nyní dozrál čas říci něco více o úhlech, stupních, volbě DEG a RAD na kalkulačkách, a podobně (s tím souvisí také vlastnosti funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$).

Začneme tzv. stupňovou mírou:



Pokud v rovině vytvoříme tzv. kartézskou soustavu souřadnic (= souřadné osy x, y jsou navzájem kolmé) a chceme měřit úhly, musí být stanoven počáteční směr, vzhledem ke kterému úhly určujeme ... tzv. vztažný směr úhlů. Za tento vztažný směr bereme kladný směr osy x.

Kladný směr růstu úhlů = = směr proti pohybu hodinových ručiček

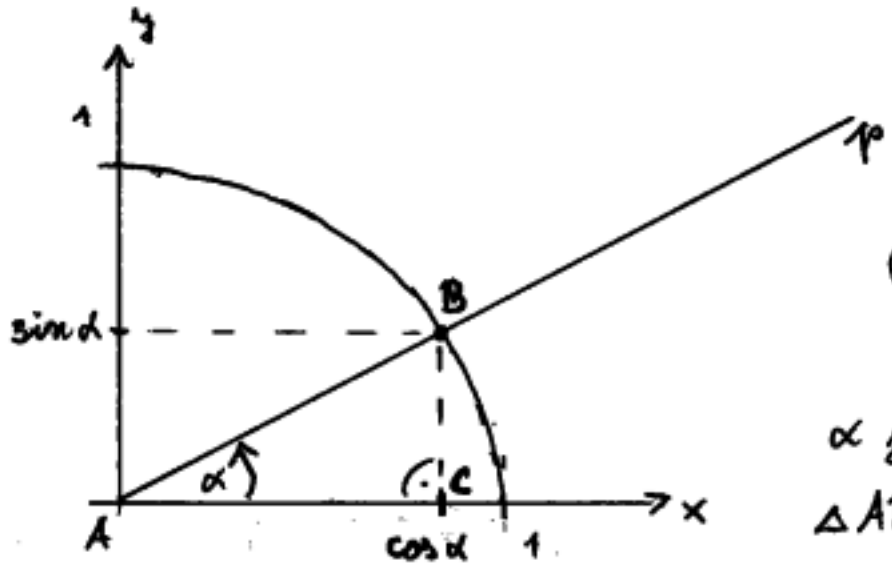
Dále se musíme dohodnout na tzv. kladném směru různých úhlů (viz obrázek).
Různým úhlu rozumíme otáčivý pohyb kladného směru osy x směrem ke druhému rameni (= okraji) úhlu (tento otáčivý pohyb znázorňujeme obloukem se šipkou uvnitř daného úhlu).
Pokud kladným směrem rozumíme otáčení proti pohybu hodinových ručiček, pak na obrázku má úhel α velikost $30°$ (píšeme $\alpha = 30°$),
β $-45°$ (píšeme $\beta = -45°$).

Tímto způsobem měříme úhly měřit. Když napíšu $\beta = -45°$, každý nyní ví, že tento úhel lze sestrojit v kartézské soustavě souřadnic tak, že jedno jeho rameno je kladný směr osy x, druhé jeho rameno leží $45°$ v záporném smyslu otáčení daleko (= po směru pohybu ručiček).

Z právě popsaného způsobu měření úhlů je vidět, že v kartézské soustavě souřadnic se vyznačuje orientace úhlu vzhledem ke kladnému směru osy x. Je to proto, abychom hned věděli, kde přesně leží druhé rameno úhlu – zda v kladném, nebo záporném smyslu od kladného směru osy x.

Rozšířená definice funkcí $\sin x$, $\cos x$:

uvažujme jistý úhel α v intervalu $(0°; 90°)$.



Označme $B = [b_1, b_2]$ průsečík ramene p směru α a jednotkové kružnice (= kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem 1)

α je jedním z ostrých úhlů v pravoúhlém $\triangle ABC$, tj. platí ($|AB| = 1$ = poloměr)

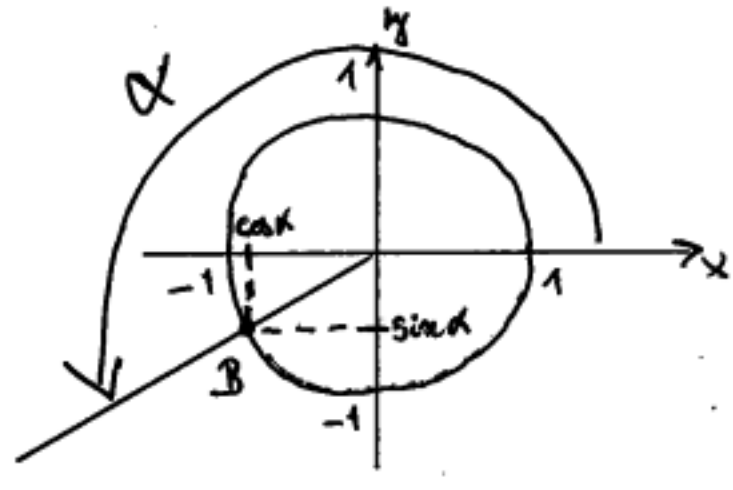
$$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BC|}{1} = |BC| = b_2 \dots \text{ tj. } \sin\alpha = y\text{-ová souřadnice bodu } B$$

$$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AC|}{1} = |AC| = b_1 \dots \text{ tj. } \cos\alpha = x\text{-ová souřadnice bodu } B$$

Platí tedy $B = [\cos\alpha, \sin\alpha]$.

Tímto způsobem rozšíříme definici funkcí $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ pro jakýkoli úhel α:

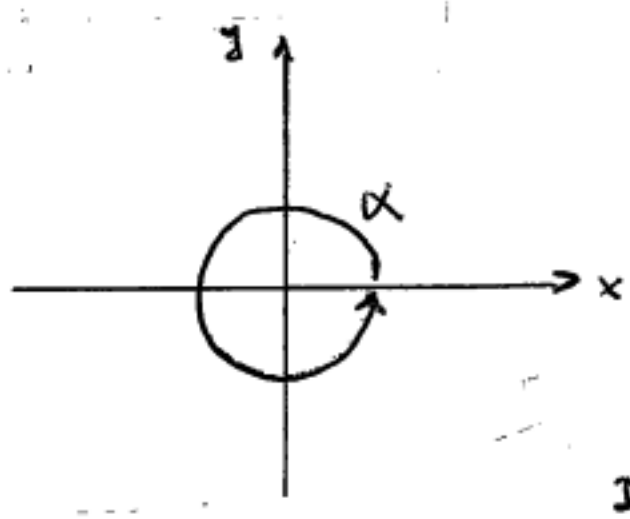
[na jednotkové kružnici nalezneme bod B jako průsečík s daným směrem, a pak
$\sin\alpha$ = y-ová souřadnice bodu B
$\cos\alpha$ = x-ová souřadnice bodu B



Toto rozšíření definice fcí $\sin x$, $\cos x$ provedl Leonhard Euler (1707 – 1783).

(S prvním fyzikálním využitím této rozšířené definice se setkáme v kapitole 4 při popisu rovnoměrného pohybu tělesa po kružnici.)

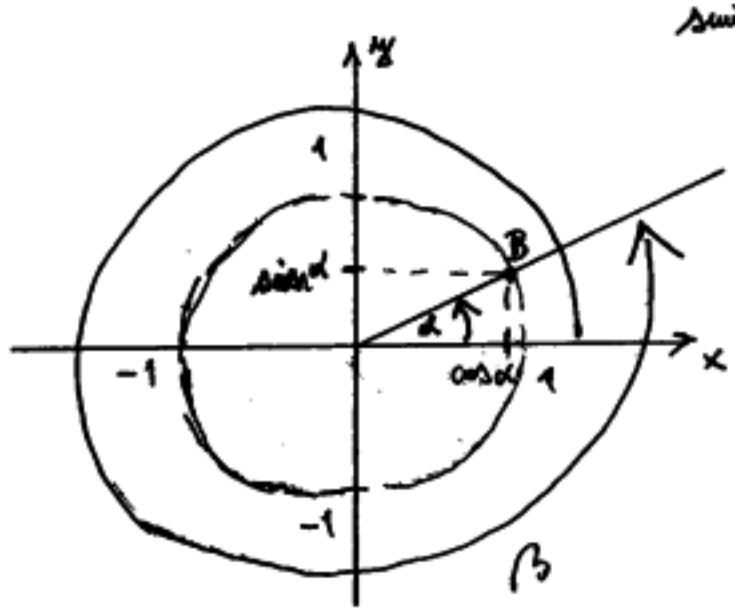
Nyní se ještě na chvíli vraťme ke stupňové míře úhlů:



Tzv. plný úhel (kolem dokola) má velikost 360°

$\alpha = 360°$

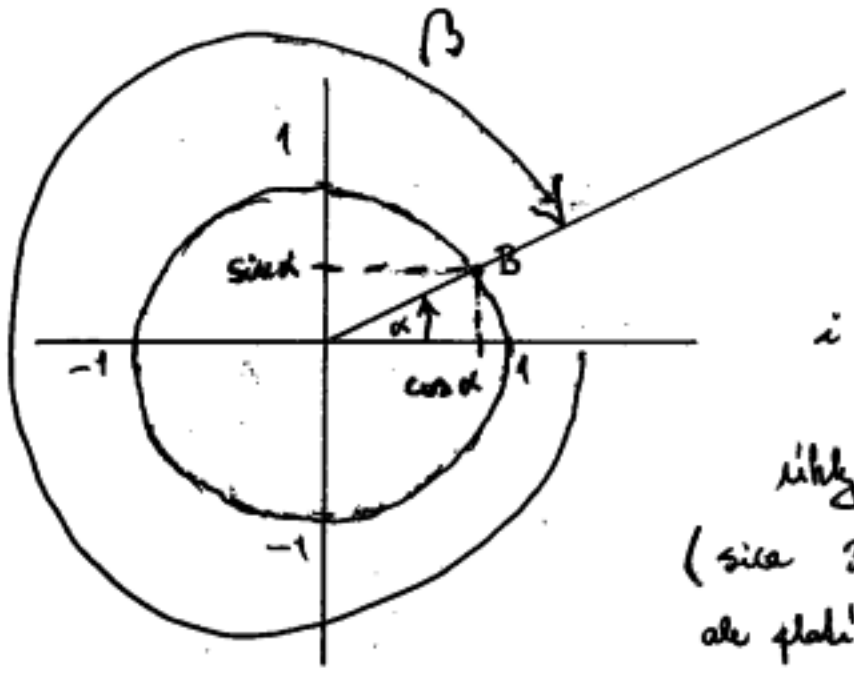
Díky tomu, že pro úhly větší než 360° se příslušné směry začínají opakovat, jednomu směru je možné přiřadit více úhlů:



směr úhlu $\alpha = 30°$ je stejný jako
směr úhlu $\beta = 360° + 30° = 390°$

úhly α, β odpovídají stejnému směru
(sice $30° \neq 390°$,
ale platí $\sin 30° = \sin 390° = b_2$
$\cos 30° = \cos 390° = b_1$

to plyne přímo z rozšíření definice funkcí $\sin x$, $\cos x$ ... pro úhly 30°, 390° je stejný odpovídající bod B na jednotkové kružnici)

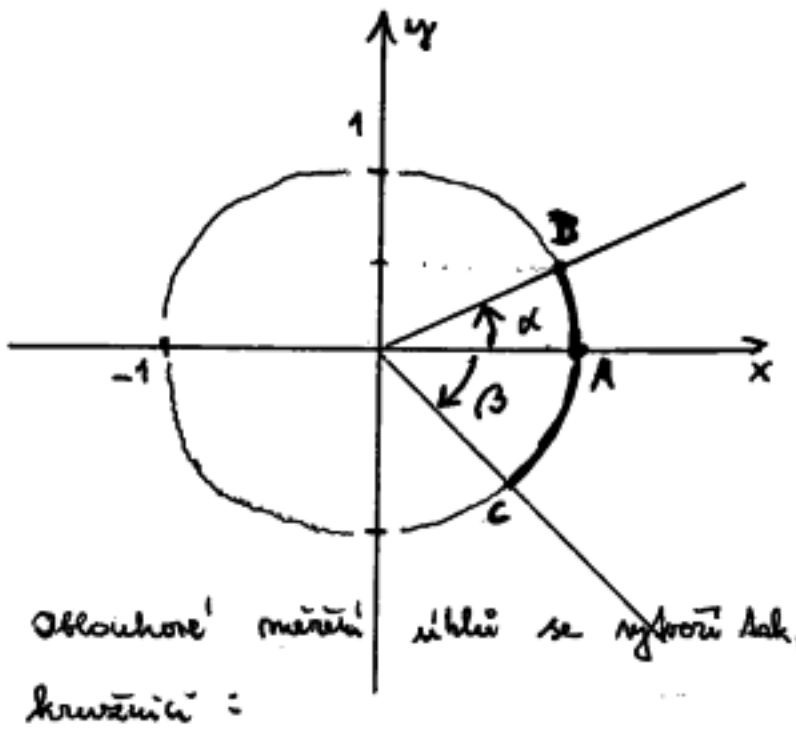


jednu směr lze vyjádřit úhlem
v kladném smyslu: $\alpha = 30°$
i v záporném smyslu: $\beta = -330°$

úhly α, β opět odpovídají stejnému směru
(sice $30° \neq -330°$,
ale platí $\sin 30° = \sin(-330°)$
$\cos 30° = \cos(-330°)$,
protože odpovídající bod B na jednotkové kružnici je pro oba úhly stejný)

Kalkulačka počítá ve stupních, pokud ji máme přepnutou na volbu DEG (z anglického DEGREE = STUPEŇ). Kalkulačky jsou po zapnutí většinou nastaveny tak, že počítají úhly ve stupních (volba DEG je zapnuta automaticky).

Ještě rozšířenější než stupňová míra je tzv. <u>obloukové míra úhlů</u>:
Vše je zavedeno stejně jako u stupňové míry, jediný rozdíl je v tom, že velikost úhlu neměříme ve stupních, ale v délce příslušného oblouku na jednotkové kružnici:

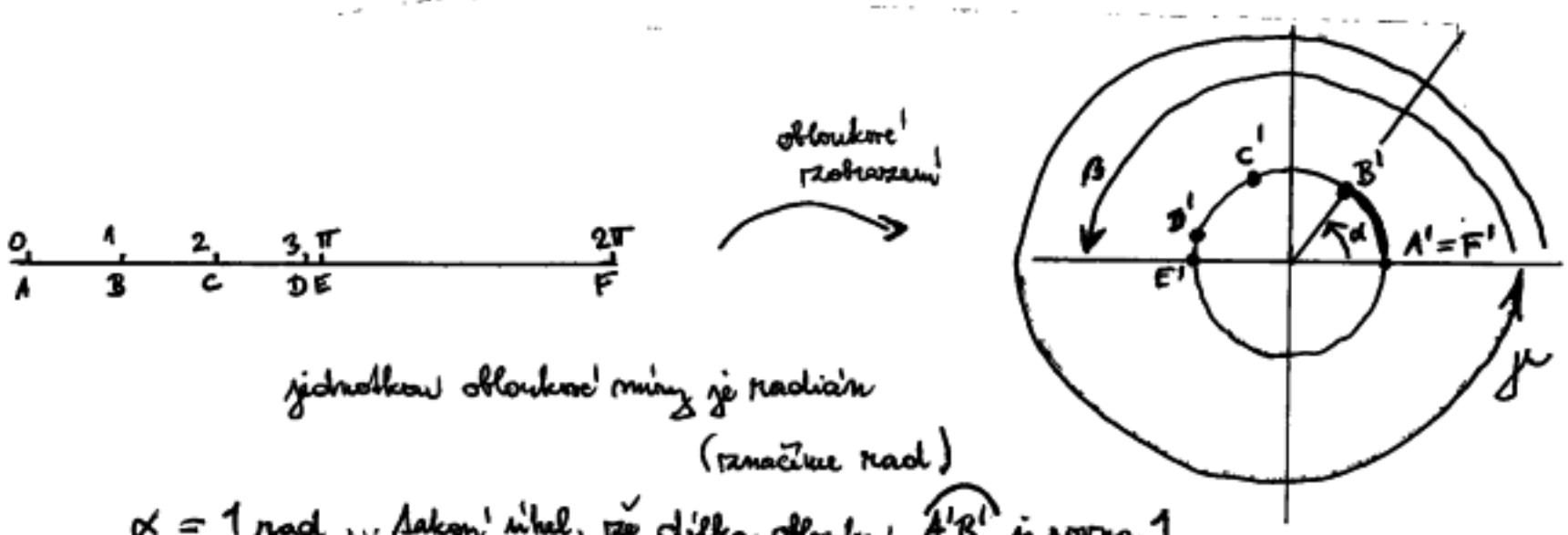


$\alpha = +$ délka oblouku $\overset{\frown}{AB}$

$\beta = \ominus$ délka oblouku $\overset{\frown}{AC}$

díky tomu, že úhel je vytvořen v záporném smyslu, je výsledná hodnota úhlu záporná

Obloukové měření úhlů se vytvoří tak, když „namotáme" reálnou osu na jednotkovou kružnici:



jednotkou obloukové míry je radián (značíme rad)

$\alpha = 1$ rad ... takový úhel, že délka oblouku $\overset{\frown}{A'B'}$ je rovna 1

$\beta = \pi$ rad ... tzv. přímý úhel (= ramena úhlu leží v jedné přímce)

$\gamma = 2\pi$ rad ... tzv. plný úhel (tj. $360° = 2\pi$ rad)

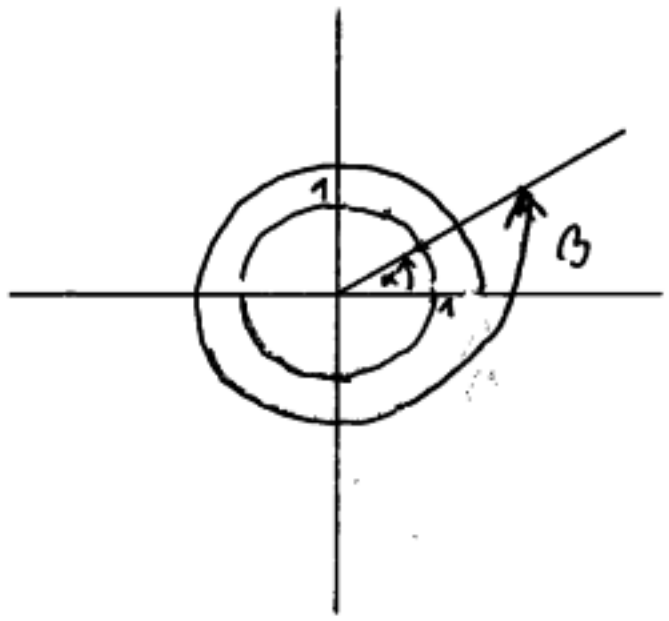
Ze vztahu pro plný úhel ve stupňové i obloukové míře plynou vzorce pro převod:

$$\boxed{1° = \left(\frac{2\pi}{360}\right) \text{rad}, \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)°} \qquad (3.7)$$

Kalkulačka počítá v radiánech, pokud ji máme přepnutou na volbu RAD.
Každá kalkulačka obvykle obsahuje funkci převádějící stupňovou hodnotu úhlu na radiánovou a naopak.

Některé důležité úhly je rozumné si pamatovat v obou úhlových mírách:

stupně	$0°$	$30°$	$45°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
radiány	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

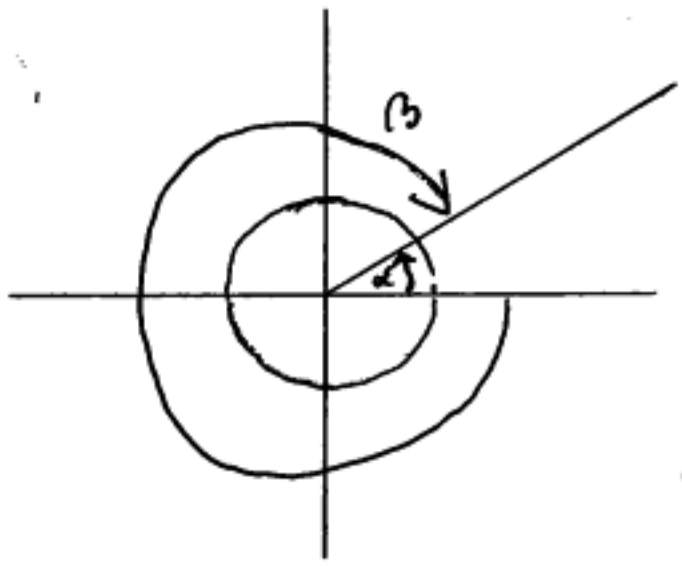


díky tomu, že pro úhly v obloukové míře větší než 2π se příslušné směry začínají opakovat, jednomu směru je možné přiřadit více úhlů:

směr úhlu $\alpha = \frac{\pi}{6}$ je stejný jako

směr úhlu $\beta = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$

(sice $\frac{\pi}{6} \neq \frac{13\pi}{6}$, ale platí $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{13\pi}{6}$, apod.)



jeden směr lze vyjádřit úhlem

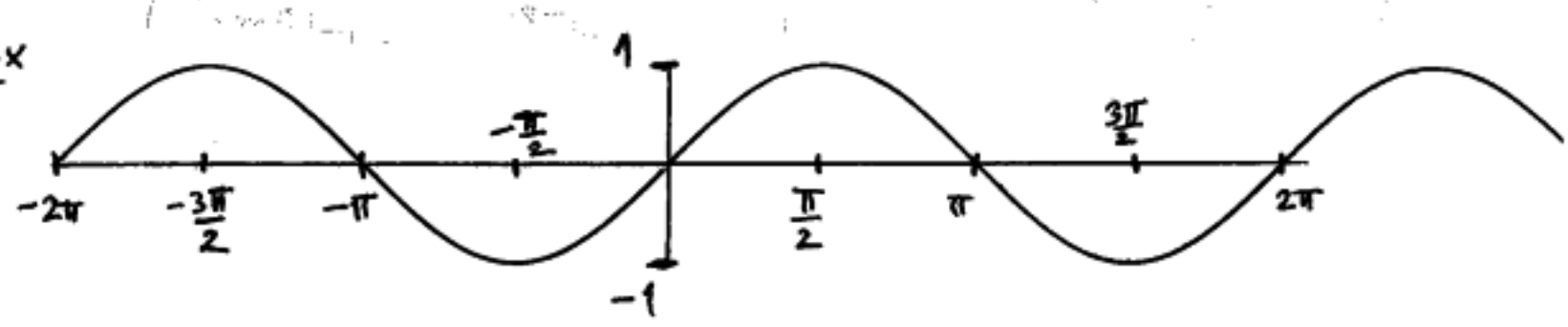
v kladném smyslu: $\alpha = \frac{\pi}{6}$

i v záporném smyslu $\beta = -\frac{11\pi}{6}$

(sice $\frac{\pi}{6} \neq -\frac{11\pi}{6}$, ale platí např. $\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$)

Obloukova míra je hodně důležitá pro práci s funkcemi $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ($\operatorname{cotg} x$); uvedme nyní některé základní vlastnosti těchto funkcí v jejich rozšířené definici:

<u>funkce $y = \sin x$</u>



Díky své rozšířené definici ($\sin x$ = první souřadnice obrazu bodu při namotání na jednotkové kružnici)

se hodnoty funkce $\sin x$ periodicky opakují a kolísají v rozmezí $\langle -1; 1\rangle$.

- $D_f = \mathbb{R}$ (... definiční obor je celá množina reálných čísel, tj. $\sin x$ je definováno pro každé $x \in \mathbb{R}$)
- $H_f = \langle -1; 1\rangle$ (... obor funkčních hodnot = množina hodnot, kterých $\sin x$ může nabývat)
- Funkce $\sin x$ je lichá, tj. $\boxed{\sin(-x) = -\sin x}$ (3.8)

$\left(\text{např. } -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(+\frac{\pi}{2}\right) = -(+1) \right)$

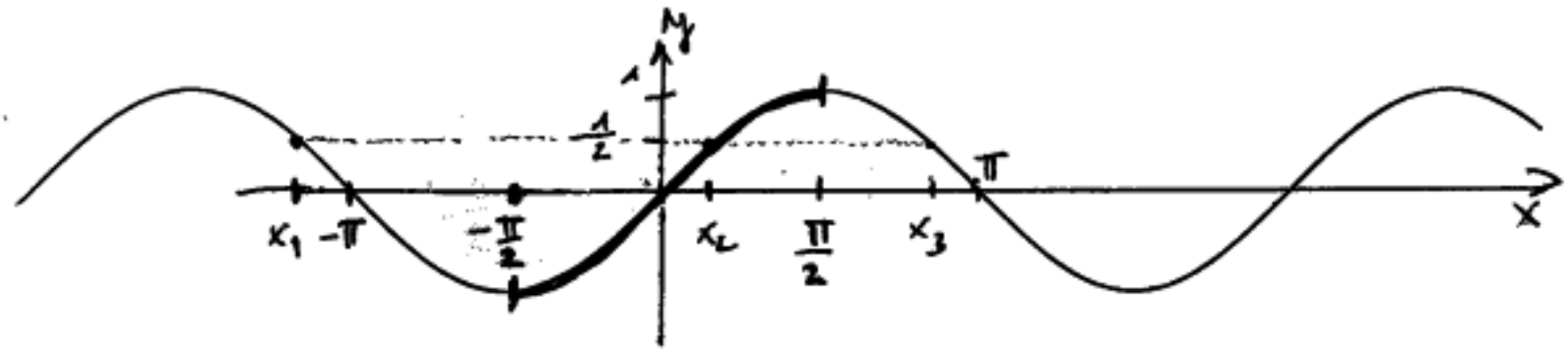
- funkce $\sin x$ je periodická, tj. její hodnoty se periodicky opakují do nekonečna

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$$

2π = délka nejmenší periody

- někdy známe naopak hodnotu y a potřebujeme najít x, pro které $y = \sin x$

Například $y = \frac{1}{2}$ a hledáme x, pro které platí $\frac{1}{2} = \sin x$



Z obrázku je vidět, že takových x je nekonečně mnoho:

$$\frac{1}{2} = \sin x_1 = \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\frac{1}{2} = \sin x_2 = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{1}{2} = \sin x_3 = \sin\frac{5\pi}{6}$$

atd.

Které z těchto řešení je správné?

Všechna, ovšem kalkulačka najde jediné z nich, a sice úhel x_2 z intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$. Tento význačný úhel je označován

$$\frac{\pi}{6} = x_2 = \arcsin\frac{1}{2}$$ (čteme: arkussinus jedné poloviny)

Funkce $x = \arcsin y$ se nazývá inverzní funkcí k funkci $y = \sin x$

(protože představuje jistý inverzní = opačný proces).

Inverzní funkci k funkci f označujeme f^{-1}

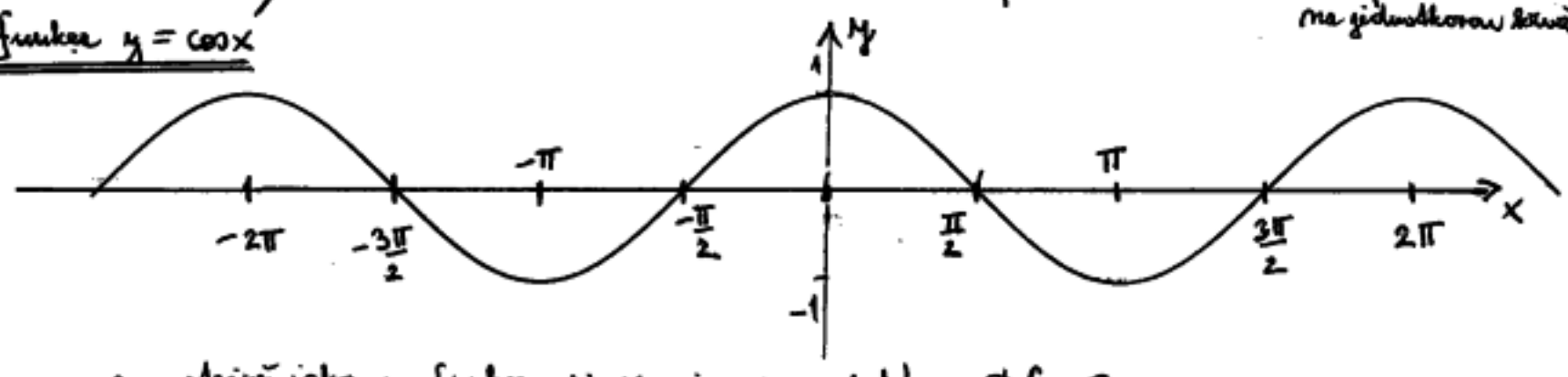
$D(\arcsin y) = \langle -1; 1 \rangle$

$H(\arcsin y) = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$

(je celkem rozumné, aby kalkulačka našla v obloukové míře právě jistý základní úhel, tj. úhel z intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ rad $= \langle -90°; 90° \rangle$)

rozšířená definice v obloukové míře ... $\cos x$ = první souřadnice obrazu x při namotání na jednotkovou kružnici

funkce $y = \cos x$



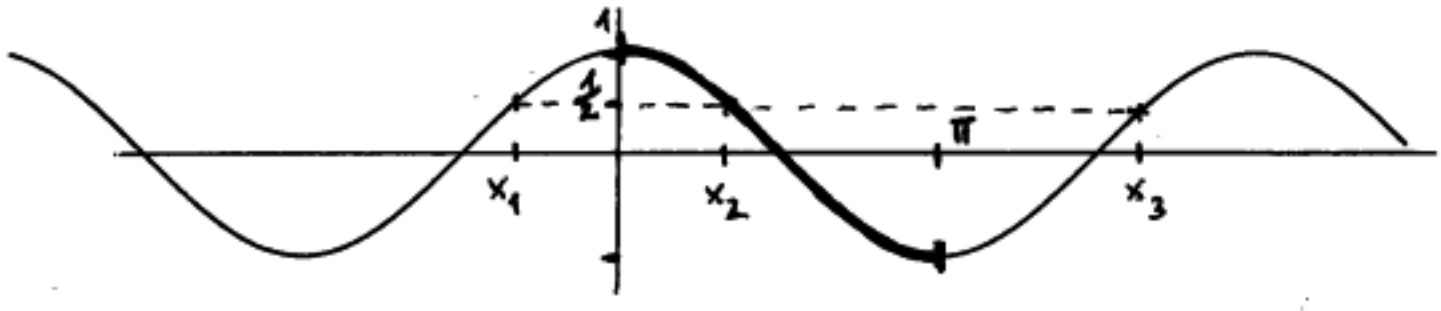
- stejně jako u funkce $\sin x$ i zde platí $Df = R$

$Hf = \langle -1; 1 \rangle$

- Hodnoty funkce $y=\cos x$ opět kolísají na intervalu $\langle -1;1\rangle$, ale míčí funkci $\sin x$ jsou posunuty: $\sin 0=0$
  $\cos 0=1$, ale až $\sin\frac{\pi}{2}=1$

  Grafy $\sin x$, $\cos x$ jsou vůči sobě o $\frac{\pi}{2}$ posunuty, tj. $\boxed{\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$ (3.9)
  nebo také $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$
- funkce $\cos x$ je sudá, tj. $\boxed{\cos(-x)=\cos x}$ (3.10)

  (např. $0=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$)
- funkce $\cos x$ je opět periodická, tj. $\cos(x)=\cos(x+2\pi)$
  2π = délka nejmenší periody
- někdy známe naopak hodnotu y a potřebujeme najít x, pro které $y=\cos x$
  Například $y=\frac{1}{2}$ a hledáme x, pro které platí $\frac{1}{2}=\cos x$



Z obrázku je vidět, že takových x je nekonečně mnoho:

$$\frac{1}{2}=\cos x_1=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\frac{1}{2}=\cos x_2=\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\frac{1}{2}=\cos x_3=\cos\frac{5\pi}{3}$$

atd.

Které z těchto řešení je správné?
Všechna, ovšem kalkulačka najde jediné z nich, a sice úhel x_2 z intervalu $\langle 0;\pi\rangle$. Tento význačný úhel je označován

$\frac{\pi}{3}=x_2=\arccos\frac{1}{2}$ (čti: arkuskosinus jedné poloviny)

$D(\arccos y)=\langle -1;1\rangle$
$H(\arccos y)=\langle 0;\pi\rangle$

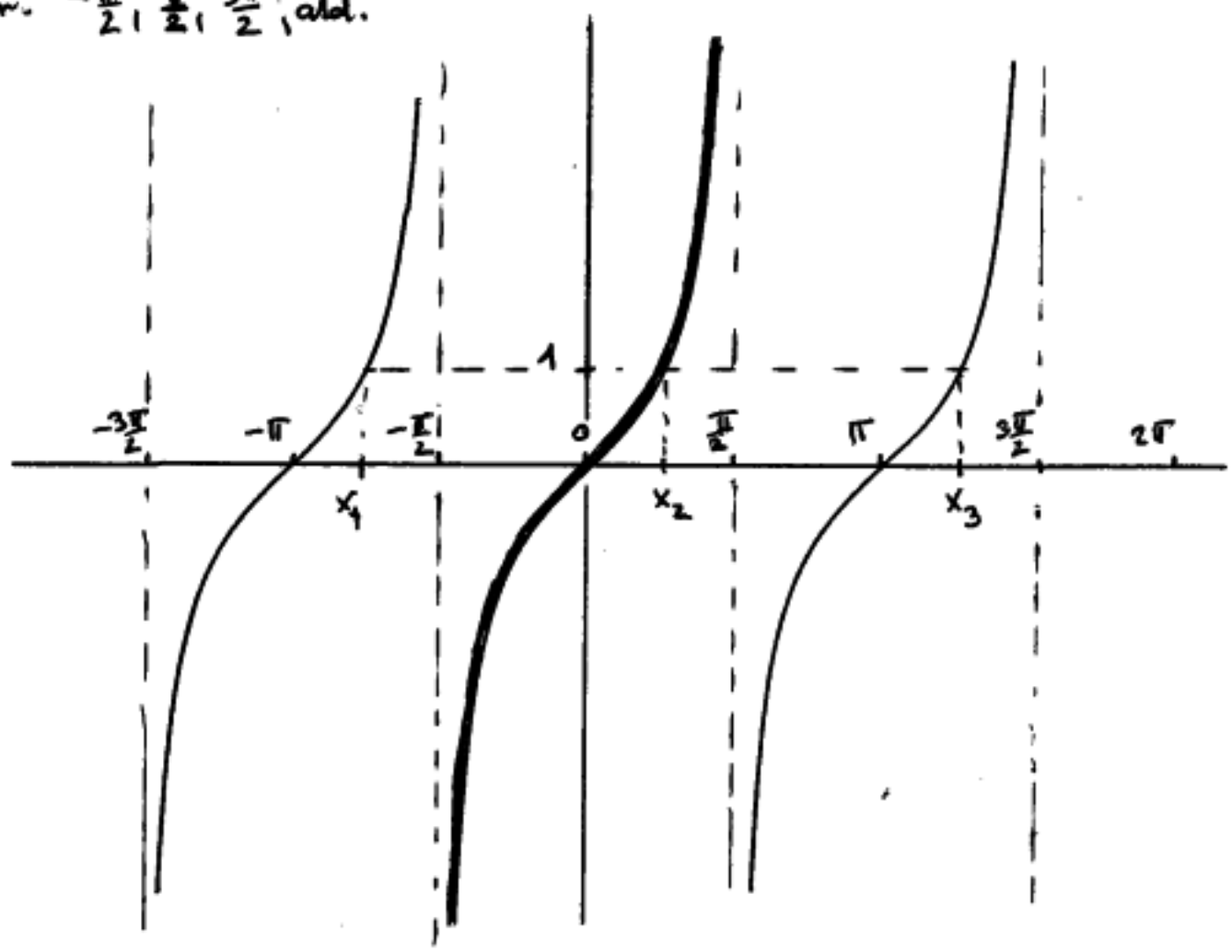
(je celkem rozumné, aby kalkulačka našla jistý základní úhel z intervalu $\langle 0;\pi\rangle$ rad $=\langle 0°, 180°\rangle$)

Funkce $y=\operatorname{tg} x$

Podobně jako u funkcí $\sin x$, $\cos x$, i zde lze užít rozšířenou definici funkce tangens:

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$$ → odkud je vidět, že pro $\cos x=0$ není $\operatorname{tg} x$ definováno

Tedy na rozdíl od funkcí $\sin x$, $\cos x$ není $\operatorname{tg} x$ definováno v některých bodech, např. $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, atd.



- funkce $y = \operatorname{tg} x$ je opět periodická, ale délka nejmenší periody je pouze π:

$$\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x+\pi)$$

- funkce $\operatorname{tg} x$ není definovaná v bodě $\frac{\pi}{2}$ a v každém bodě, který se od $\frac{\pi}{2}$ liší o nějaký celočíselný násobek periody, tj.

$$D(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right\}$$

π … délka nejmenší periody

$k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

$H(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R}$ … funkce $\operatorname{tg} x$ nabývá všech reálných hodnot

- funkce $\operatorname{tg} x$ je lichá, tj.

$$\boxed{\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x} \qquad (3.11)$$

(skutečně: $\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} \underset{\text{podle (3.9), (3.11)}}{=} \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$)

- někdy známe naopak hodnotu y a potřebujeme najít x, aby $y = \operatorname{tg} x$.

Např. $y = 1$ a hledáme x tak, aby $1 = \operatorname{tg} x$:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \operatorname{tg} x_1 = \frac{\pi}{4} - \pi \\ 1 &= \operatorname{tg} x_2 = \frac{\pi}{4} \\ 1 &= \operatorname{tg} x_3 = \frac{\pi}{4} + \pi \\ &\text{atd.} \end{aligned}\right\}$$

kalkulačka najde řešení $x_2 = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4}$

(čteme: arkustangens)

$x = \operatorname{arctg} y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Tedy $D(\operatorname{arctg} y) = \mathbb{R}$
$H(\operatorname{arctg} y) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

funkce $y = \operatorname{cotg} x$

Někdy se definuje funkce kotangens vztahem $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Ale protože skoro vždy platí $\boxed{\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}}$, pokud se v některých vztazích vyskytne $\operatorname{cotg} x$, nahrazujeme ji funkcí $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Takže $\operatorname{cotg} x$ nejčastěji na kalkulačkách zavedena.

Funkce $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ se nazývají goniometrické funkce,

k nim inverzní arcsiny, arccosy, $\operatorname{arctg} y$, $\operatorname{arccotg} y$ se nazývají cyklometrické funkce.

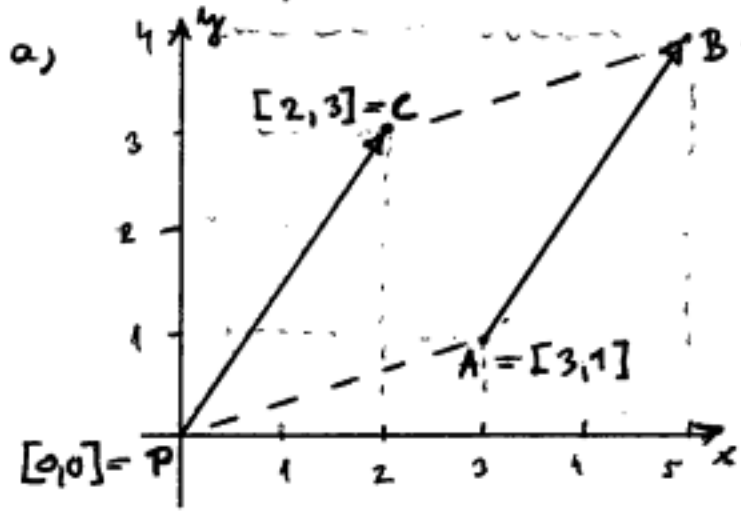
3.4. Souřadnice vektoru

Vektory ani operace sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem nezávisí na soustavě souřadnic, která je zvolena v dané rovině (= dimenze 2) nebo prostoru (= dimenze 3). Nicméně většinou v daném prostoru je nějaká soustava souřadnic zavedena, a tak bude rozumné nějak „popsat" vektor v zadané souřadné soustavě.

Uděláme to tak, že každému vektoru přiřadíme jeho souřadnice.

Proveďme toto přiřazení souřadnic třemi způsoby:

a)



Chceme určit souřadnice vektoru $\vec{AB}$.

Posuneme rovnoběžně (= tak, aby byl zachován směr i velikost) vektor $\vec{AB}$ tak, aby vycházel z počátku souřadné soustavy: $\vec{PC} = \vec{AB}$.

Pak souřadnice vektoru $\vec{AB}$ jsou stejné jako souřadnice bodu C, tj. $\vec{AB} = (2,3)$

Z právě popsané definice souřadnic vektoru mimo jiné plyne, že

- stejnými souřadnicemi popisujeme všechny „šipky", které mají stejnou velikost a směr jako vektor $\vec{PC}$ (tj. souřadnice vektoru nezávisí na poloze vektoru: všechny vektory se stejnou velikostí a směrem mají stejné souřadnice) např. $\vec{AB} = \vec{PC}$
- souřadnice lze zkoumat dvojím způsobem:

$[2,3]$ = souřadnice bodu C

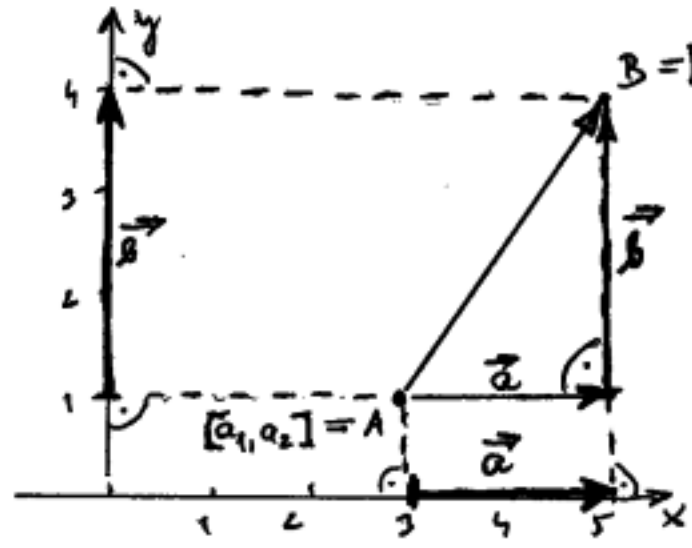
$(2,3)$ = souřadnice vektoru $\vec{PC}$

} tedy uspořádaná dvojice (obecně n-tice) popisuje jak body, tak vektory; popis budeme rozlišovat pouze závorkami:

hranaté závorky ... souřadnice bodu

kulaté závorky ... souřadnice vektoru

b)



Druhý způsob zavedení souřadnic je ten, který budeme většinou používat: rozložíme vektor $\vec{AB}$ na součet vektorů rovnoběžných se souřadnými osami:

$$\vec{AB} = \vec{a} + \vec{b}$$

vektor $\vec{a}$ se někdy nazývá kolmý průmět vektoru $\vec{AB}$ na osu x

$\vec{b}$ na osu y

Pak první souřadnice vektoru $\vec{AB}$ – je kladná, když směr průmětu na osu x je kladný
– má velikost rovnu $|\vec{a}|$

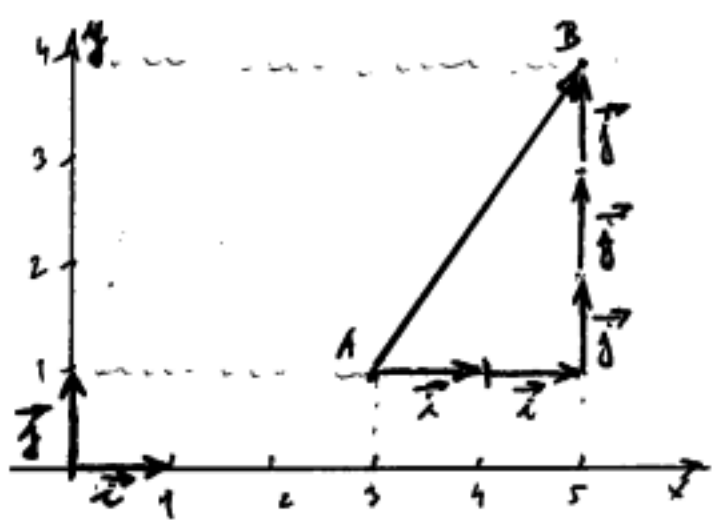
druhá souřadnice vektoru $\vec{AB}$ – je kladná, jestliže směr průmětu na osu y je kladný
– má velikost $|\vec{b}|$

Tedy celkem $\vec{AB} = (|\vec{a}|, |\vec{b}|) = (5-3, 4-1) = (2,3) = (b_1-a_1, b_2-a_2)$,

tj. souřadnice vektoru $\vec{AB}$ jsou dány rozdílem souřadnic koncového a počátečního bodu:

$$\boxed{A=[a_1,a_2],\ B=[b_1,b_2] \Rightarrow \vec{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2)} \quad (3.12)\ a)$$

c) Vidíme, že oba předchozí způsoby zavedení souřadnic vektoru jsou ekvivalentní, tj. souřadnice vektoru $\vec{AB}$ jsou stále stejné. Následující třetí způsob je vlastně pouze dětmi předchozím způsobům v hlavě modrém, pouze počítání s novým pojmem jednotkového vektoru ve směru souřadné osy:



$\vec{i} = (1,0)$ ... jednotkový vektor v kladném směru osy x

$\vec{j} = (0,1)$ ... jednotkový vektor v kladném směru osy y

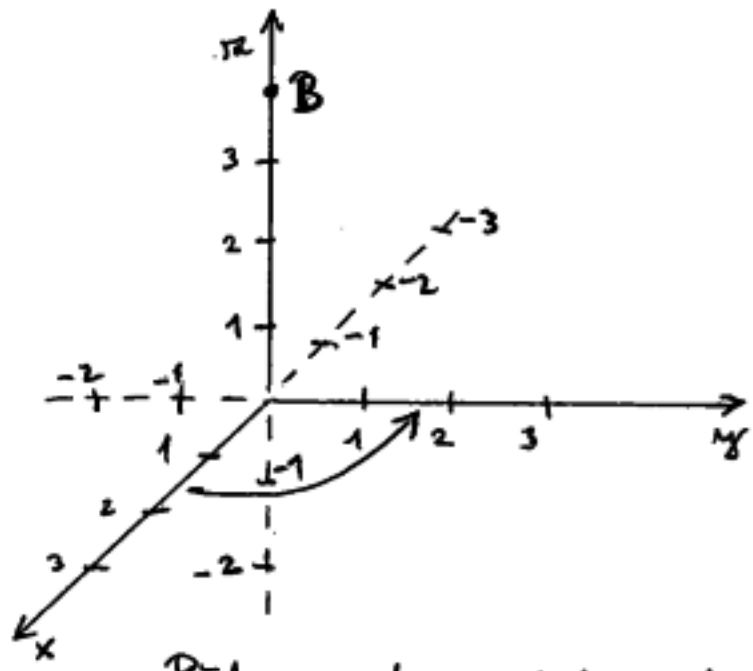
Pak souřadnice vektoru $\vec{AB}$ jsou ta čísla a, b, pro která platí

$$\vec{AB} = a\cdot\vec{i} + b\cdot\vec{j}$$

Z obrázku dostáváme $2\cdot\vec{i} + 3\cdot\vec{j} = \vec{AB}$

Opět vidíme, že $\vec{AB} = (a,b) = (2,3)$.

d) Předchozí tři přístupy můžeme zopakovat i pro souřadnice vektorů v prostoru:



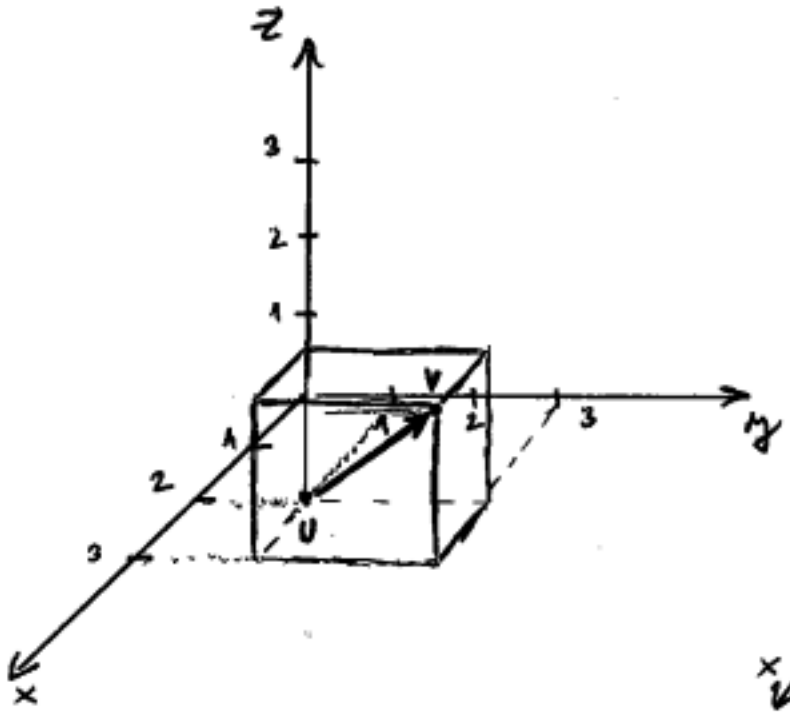
Trojice souřadných os x, y, z tvoří tzv. pravotočivý souřadný systém (= když se z bodu B zvětšeným v kladné části osy z díváme na to, jak se osa x otáčí směrem k ose y, otáčení vidíme v kladném smyslu (= proti směru ručiček))

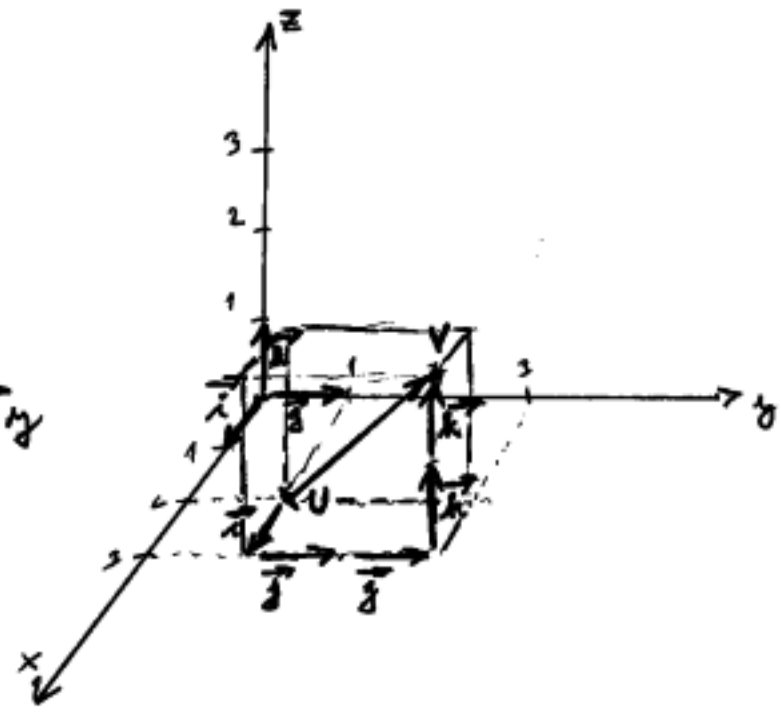
Přitom soustava souřadnic je kartézská (= každá ze souřadných os je kolmá na ostatní + všechny se navzájem protínají v nule)

Opět platí vztah analogický vztahu (3.13):

$$\boxed{U=[u_1,u_2,u_3],\ V=[v_1,v_2,v_3] \Rightarrow \overrightarrow{UV}=(v_1-u_1,v_2-u_2,v_3-u_3)} \quad (3.12)\,b)$$

Například pro $U=[2,1,0]$; $V=[3,3,2]$ máme $\overrightarrow{UV}=(3-2,3-1,2-0)=(1,2,2)$





Pokud definujeme i v prostoru jednotkové vektory ve směru souřadných os

$\vec{i}=(1,0,0)$ ... jednotkový vektor v kladném směru osy x

$\vec{j}=(0,1,0)$ ... y

$\vec{k}=(0,0,1)$ ... z, pak souřadnice vektoru $\overrightarrow{UV}$ lze opět chápat jako násobky a, b, c daných jednotkových vektorů takové, že platí

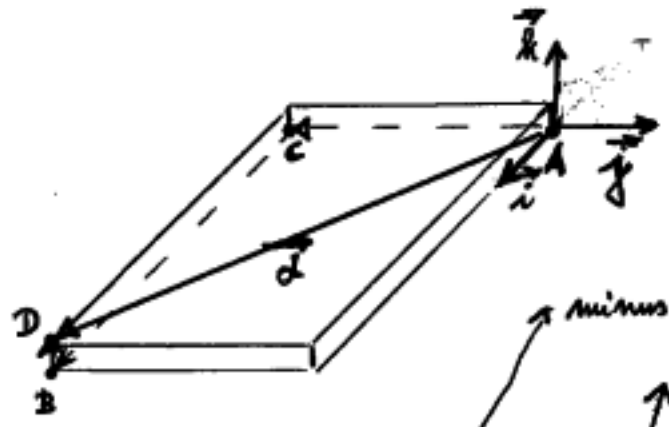
$$\overrightarrow{UV}=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}+c\cdot\vec{k}$$

Z obrázku vidíme, že $\overrightarrow{UV}=1\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}=(1,2,2)$.

Samozřejmě souřadnice vektoru nemusí být vždy celočíselné – vraťme-li se k příkladu 12

a zvolíme soustavu souřadnic tak, aby – její počátek splýval s počátečním bodem cesty A
– vektor $\vec{i}$ směřoval na jih
– vektor $\vec{j}$ směřoval na východ
– vektor $\vec{k}$ směřoval svisle vzhůru,

potom



$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1\,km$

minus, protože $\vec{AC}$ má opačný směr než $\vec{j}$

plus, protože $\vec{CB}$ má stejný směr jako $\vec{i}$

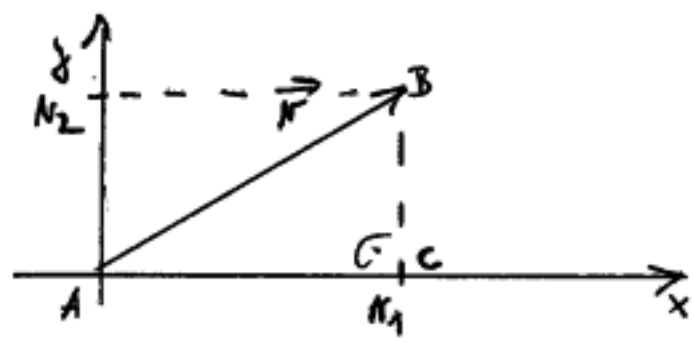
plus, protože $\vec{BD}$ má stejný směr jako $\vec{k}$

$$\vec{d} = \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BD} = -2{,}6\cdot\vec{j} + 3{,}9\cdot\vec{i} + 0{,}025\cdot\vec{k} =$$
$$= \underline{\underline{(3{,}9;\ -2{,}6;\ 0{,}025)}}$$

Když nyní máme vysvětlen pojem souřadnic vektoru, bude užitečné vědět, jaký vztah existuje mezi souřadnicemi vektoru a jeho velikostí:

a) pro vektor v rovině: $\boxed{\vec{v} = (v_1, v_2) \ \dots\ |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$ (3.13)...a

Tento vztah vlastně plyne z Pythagorovy věty: posuneme-li počáteční bod vektoru $\vec{v}$ do počátku, souřadnice v_1, v_2 jsou délky odvěsen v pravoúhlém trojúhelníku ABC



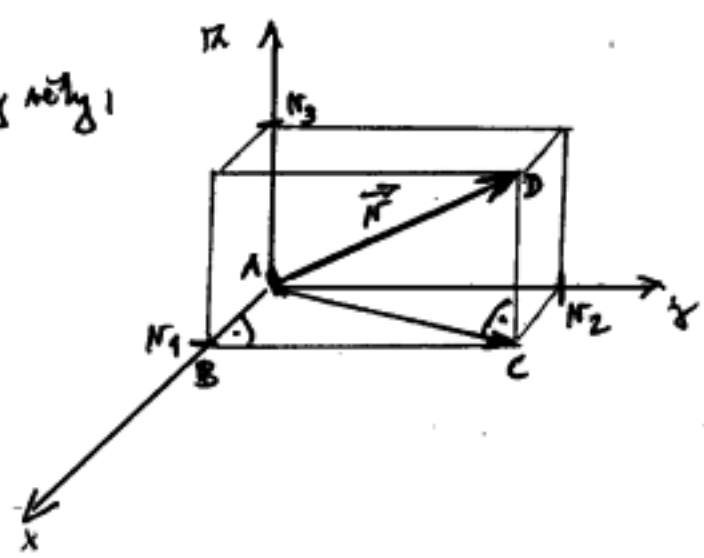
b) pro vektor v prostoru: $\boxed{v = (v_1, v_2, v_3) \ \dots\ |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$ (3.13)b

Tento vztah také plyne z Pythagorovy věty, kterou použijeme dvakrát:

$\triangle ABC$: $|\vec{AC}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

$\triangle ACD$: $|\vec{v}| = |\vec{AD}| =$
$= \sqrt{|\vec{AC}|^2 + |\vec{CD}|^2} =$
$= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

a to je hledaný vztah.



3.5. Sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem – algebraický přístup

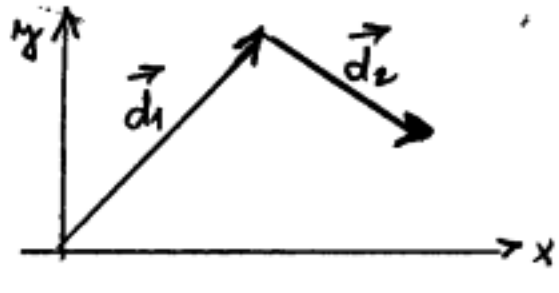
I když slova „algebraický přístup" působí poněkud tajemně, nejedná se o nic jiného než o to, že pokud známe souřadnice vektorů $\vec{a}, \vec{b}$, pak jejich součet a násobek vektoru $\vec{a}$ skalárem lze vyjádřit opět užitím souřadnic:

(nemusíme vektory graficky sestrojovat)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)\\ \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{součet} \ldots\ \vec{a}+\vec{b} = (a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z)\\ \text{násobek skalárem } 5 \ldots\ 5\cdot\vec{a} = (5\cdot a_x,\ 5\cdot a_y,\ 5\cdot a_z)\end{array} \qquad (3.14)$$

Kontrola 3. (a) Jaká znaménka mají x-ové

(b) a y-ové složky (= souřadnice) vektorů $\vec{d_1}, \vec{d_2}$ na obrázku?



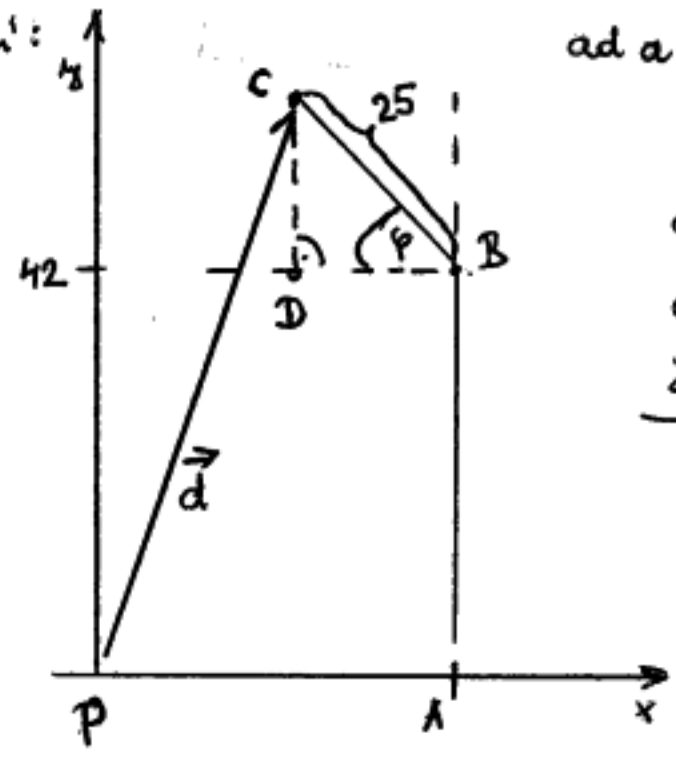
(c) Jaká jsou znaménka x-ové a y-ové složky vektoru $\vec{d_1}+\vec{d_2}$?

Př. 15. Trasa mototuristické soutěže je vymezena následujícími pokyny: od místa startu jedete po nejlepší silnici ke kontrolnímu stanovišti A, které je od startu vzdáleno 36 km východním směrem. Další kontrola B leží 42 km severně od A. Cíl C je od stanoviště B vzdálen 25 km na severozápad.

a) Vyjádřete vektor $\vec{d}$ posunutí z místa startu na stanoviště C pomocí souřadnic.

b) Určete jeho velikost a směr (směr vyjádřete úhlem θ mezi vektorem $\vec{d}$ a východním směrem).

[řešení:



ad a) souřadnice určíme například pro souřadné osy znázorněné na obrázku: (jednotka = 1 km)

část P → A ... x-ová souřadnice vzroste o 36

část A → B ... x-ová souřadnice se nemění

část B → C ... x-ová souřadnice klesne o $|BD|$:

$$\cos\varphi = \frac{|BD|}{25} \Rightarrow |BD| = 25\cdot\cos\varphi = 25\cdot\cos 45^\circ = 25\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

celkem $d_x = 36 + 0 - 17{,}68 = \underline{\underline{18{,}32}}$ km

Podobně pro souřadnici ve směru osy y:

část P → A … y-ová souřadnice se nemění

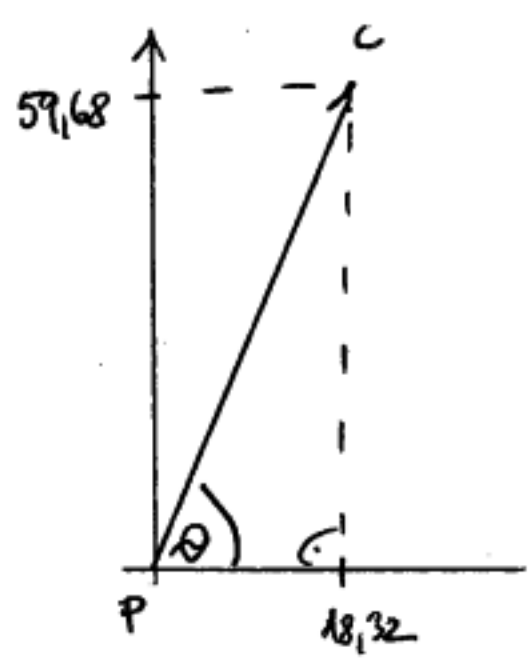
část A → B … y-ová souřadnice vzroste o 42

část B → C … y-ová souřadnice vzroste o |CD|: $\sin 45° = \frac{|CD|}{25} \Rightarrow |CD| = 25 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

celkem $d_y = 0 + 42 + 17{,}68 = \underline{\underline{59{,}68 \text{ km}}}$

Tedy $\vec{d} = (18{,}32;\ 59{,}68)$.

ad b)



$|\vec{d}| = \sqrt{18{,}32^2 + 59{,}68^2} = \underline{\underline{62{,}43 \text{ km}}}$

$\operatorname{tg} \Theta = \frac{59{,}68}{18{,}32} = 3{,}26 \Rightarrow$

$\underline{\underline{\Theta = \operatorname{arctg} 3{,}26 = 72{,}9° = 1{,}27 \text{ rad}}}$]

Př. 16. Jsou dány vektory $\vec{a} = 4{,}2 \cdot \vec{i} - 1{,}6 \cdot \vec{j}$

$\vec{b} = -1{,}6 \cdot \vec{i} + 2{,}9 \cdot \vec{j}$

$\vec{c} = -3{,}7 \vec{j}$. Určete $\vec{r} = \vec{a} + \underbrace{2 \cdot \vec{b}}_{\text{násobení vektoru } \vec{b} \text{ skalárem } 2} + \underbrace{3 \cdot \vec{c}}_{\text{násobení vektoru } \vec{c} \text{ skalárem } 3}$

[řešení: grafický přístup by byl v tomto případě zdlouhavý a nepřesný. S výhodou použijeme souřadnic:

$\vec{r} = (4{,}2 - 2 \cdot 1{,}6 + 3 \cdot 0;\ 1{,}6 + 2 \cdot 2{,}9 - 3 \cdot 3{,}7) = (1;\ -3{,}7) =$

$= \underline{\underline{\vec{i} - 3{,}7 \cdot \vec{j}}}$]

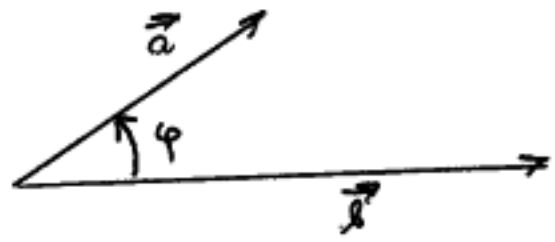
3.6. Skalární a vektorový součin vektorů

A. Skalární součin vektorů

Úvodem hned řečeno, že skalárním součinem se nemyslí něco jiného než násobení vektoru skalárem:

- násobení vektoru skalárem … (viz 3.2 a 3.5) … vektor násobím číslem, výsledkem je vektor
- skalární součin dvou vektorů … (probereme teď) … dva vektory násobím mezi sebou, výsledkem je číslo

Přesná definice skalárního součinu vektorů $\vec{a}, \vec{b}$:

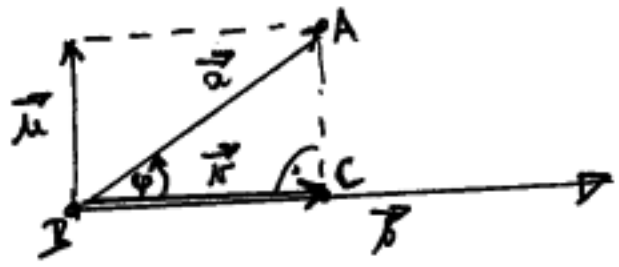


vektory $\vec{a}, \vec{b}$ mezi sebou obecně svírají úhel φ; abychom mohli provést jejich skalární součin, musíme „jeden vektor promítnout do směru druhého vektoru":

a) například vektor $\vec{a}$ rozložíme na součet vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ tak, aby

$\vec{u} \perp \vec{b}$ ... vektor $\vec{u}$ je kolmý na vektor $\vec{b}$

$(\vec{a} = \vec{u} + \vec{v})$ $\qquad$ $\vec{v} \parallel \vec{b}$ ... vektor $\vec{v}$ je rovnoběžný s vektorem $\vec{b}$



vektor $\vec{u}$ kolmý k $\vec{b}$ nemá na skalární součin vliv:

$$\vec{u} \cdot \vec{b} = 0$$

Proto dostáváme, že

pokud $\vec{v}, \vec{b}$ jsou rovnoběžné, $\vec{v} \cdot \vec{b}$ = součinu jejich velikostí

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{v} \cdot \vec{b} = |\vec{v}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

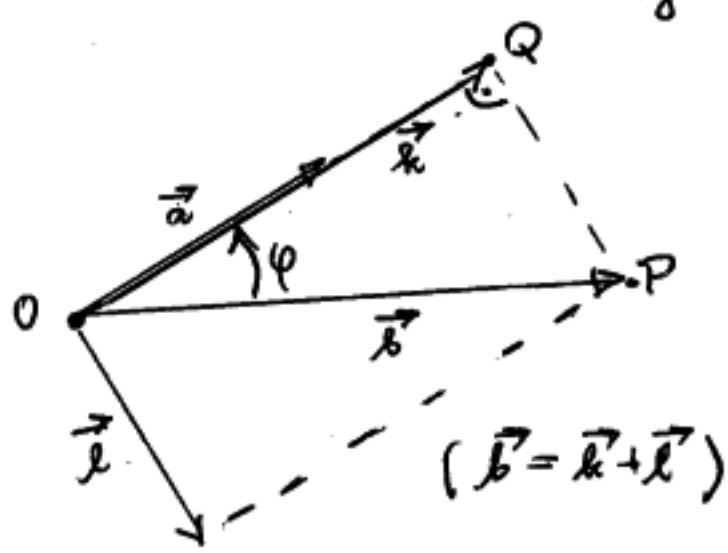
skalární součin vektorů značíme stejným znaménkem násobení jako součin dvou čísel

z pravoúhlého trojúhelníku ABC máme $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{a}|}$, tedy platí $|\vec{v}| = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$

Tedy celkem jsou jednoduše:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi} \qquad (3.15)$$

b) Výsledek skalárního součinu nezávisí na tom, do směru kterého vektoru „promítáme" tento druhý: pokud bychom naopak vektor $\vec{b}$ promítli do směru vektoru $\vec{a}$, výsledek bude stejný:



$\vec{k} \parallel \vec{a}$

$\vec{l} \perp \vec{a}$ ... $\vec{l} \cdot \vec{a} = 0$

(skalární součin dvou kolmých vektorů je nula)

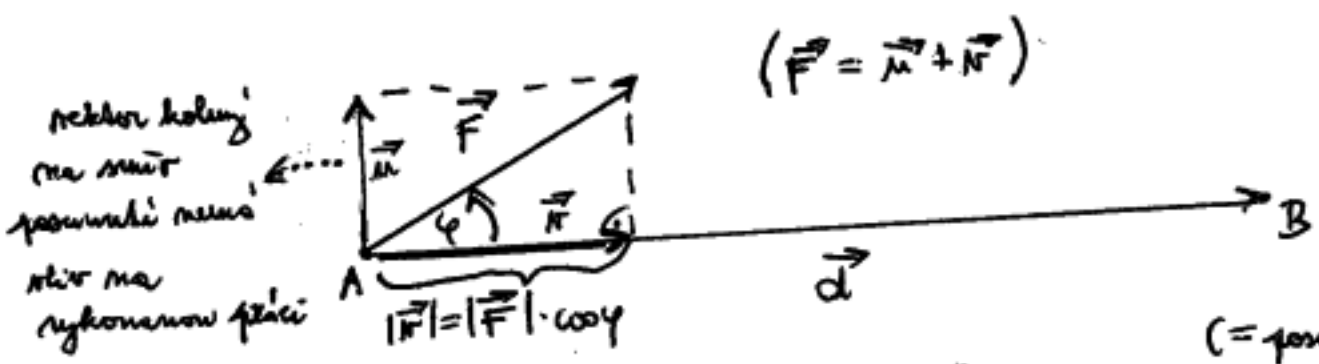
Pokud $\vec{a}, \vec{k}$ jsou rovnoběžné, skalární součin je roven součinu jejich velikostí:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{k} + \vec{l}) = \vec{a} \cdot \vec{k} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{l}}_{=0} = |\vec{a}| \cdot |\vec{k}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

z pravoúhlého $\triangle OPQ$ máme $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{k}|}{|\vec{b}|}$, tj. $|\vec{k}| = |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

- Ze způsobu definice vidíme první oblast využití skalárního součinu ve fyzice:

s promítáním jednoho vektoru do směru druhého vektoru jsme se setkali při výpočtu práce (viz též str. 44, ale to důležité znovu zopakujeme zde):



pokud chceme určit velikost práce W při posunutí tělesa daným vektorem $\vec{d}$ (= posunutí z místa A do místa B)

působením konstantní síly $\vec{F}$, „promítáme" vektor $\vec{F}$ do směru posunutí $\vec{d}$, takže platí

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\varphi} \qquad (3.16)$$

S dalšími oblastmi užití skalárního součinu se seznámíme v některých pozdějších kapitolách (počínaje kapitolou 7, která se bude nejprve zabývat výpočtem vykonané práce W).

- Z definice skalárního součinu je vidět, že nezáleží na tom, v jakém pořadí oba vektory napíšeme: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(této vlastnosti říkáme komutativita... skalární součin je komutativní operací)

- Až dosud byla řeč o skalárním součinu pouze z pozice velikosti a směru vektorů; otázkou je, zda můžeme nějak skalární součin spočítat, pokud je zavedena soustava souřadnic a známe souřadnice obou vektorů:

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= (a_x, a_y, a_z) \\ \vec{b} &= (b_x, b_y, b_z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

Při odvození máme pomůcku vztah mezi souřadnicemi vektorů a jednotkovými vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ve směru souřadných os (viz str. 54 ... oddíl c,)

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \cdot (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) =$$

součin

bude po roznásobení převedeno na součet dílčích součinů

$$\begin{aligned} = {} & \underline{a_x \cdot b_x \cdot \vec{i} \cdot \vec{i}} + a_x \cdot b_y \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x \cdot b_z \cdot \vec{i} \cdot \vec{k} \\ & + a_y \cdot b_x \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + \underline{\underline{a_y \cdot b_y \cdot \vec{j} \cdot \vec{j}}} + a_y \cdot b_z \cdot \vec{j} \cdot \vec{k} \\ & + a_z \cdot b_x \cdot \vec{i} \cdot \vec{k} + a_z \cdot b_y \cdot \vec{j} \cdot \vec{k} + \underline{\underline{a_z \cdot b_z \cdot \vec{k} \cdot \vec{k}}} = \end{aligned}$$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$
(navzájem kolmé vektory)

$= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$.

$\uparrow$ $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, protože dané vektory jsou vždy rovnoběžné a jejich velikost je 1

Tedy celkem ještě jednou :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \\ \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z} \quad (3.17)$$

<u>Kontrola 4.</u> $|\vec{c}| = 3$, $|\vec{d}| = 4$. Jaký úhel tyto vektory svírají, má-li jejich skalární součin $\vec{c} \cdot \vec{d}$ hodnotu a) nulovou

b) 12

c) −12 ?

<u>Př. 17.</u> Jaký úhel svírají vektory $\vec{a} = 3 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j}$, $\vec{b} = -2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{k}$?

[řešení : užijeme dvojího způsobu výpočtu skalárního součinu $\vec{a} \cdot \vec{b}$:

a) pomocí souřadnic : $\left.\begin{array}{l}\vec{a} = (3, -4, 0) \\ \vec{b} = (-2, 0, 3)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = \underline{\underline{-6}}$
(vztah 3.17)

b) pomocí velikostí vektorů a úhlu φ (= vztah 3.15) :

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5 , \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$\uparrow$ podle (3.13)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = \underline{\underline{5 \cdot \sqrt{13} \cdot \cos\varphi}}$$

c) celkem máme (oba výsledky se musí rovnat) : $-6 = 5 \cdot \sqrt{13} \cdot \cos\varphi$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{-6}{5 \cdot \sqrt{13}}\right) = \arccos(-0{,}3328) = \underline{\underline{1{,}91\,\text{rad} = 109{,}44^\circ}}$$

$\uparrow$

Vektory svírají úhel $\varphi = 1{,}91\,\text{rad} = 109{,}44^\circ$ (podle toho, zda máme kalkulačku zapnutou na radiány (RAD) nebo na stupně (DEG).]

<u>poznámka</u> : pod úhlem, který vektory svírají, máme vždy na mysli menší ze úhlů φ, ψ .

Funkce arccos vždy tento menší úhel najde, protože nabývá hodnot ze intervalu $\langle 0; 180 \rangle^\circ = \langle 0; \pi \rangle$ rad

(viz str. 51 : $H(\arccos x) = \langle 0; \pi \rangle$)

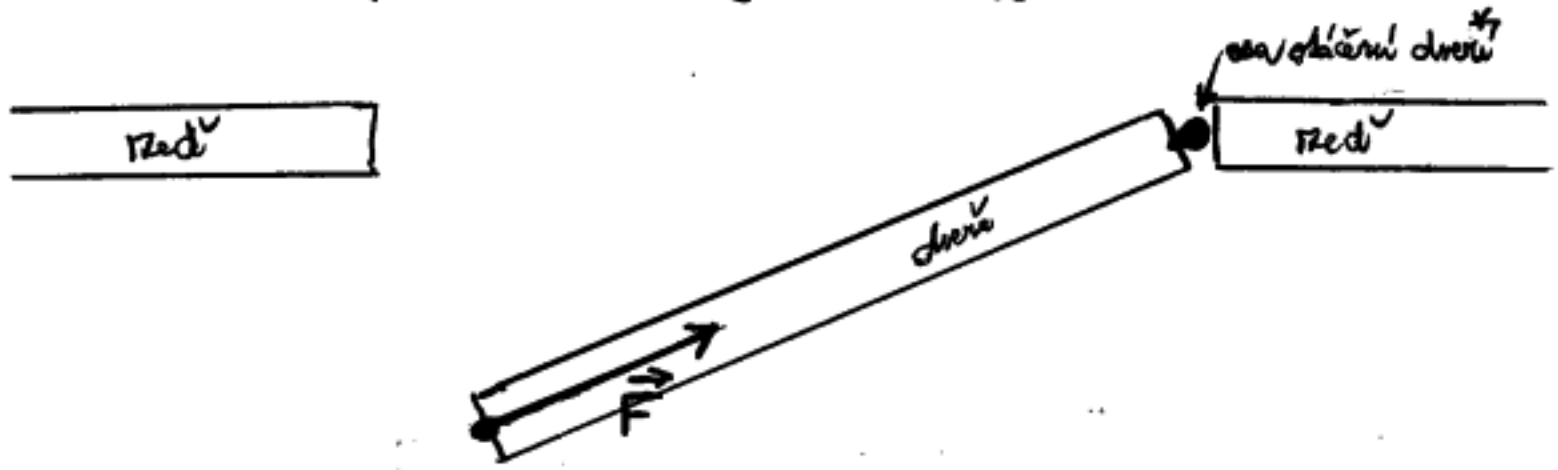
B. Vektorový součin vektorů

Poté, co student absolvoval násobení vektoru skalárem a skalární součin vektorů, jistě si klade otázku, zda je možné zavést ještě nějaký jiný typ součinu vektorů. Matematicky to je možné celkem jednoduše:

- skalární součin vektorů ... výsledkem je skalár (= číslo)
- vektorový součin vektorů ... výsledkem je vektor

Ale fyzikálně to dá více práce ... na následující konkrétní situaci vysvětlíme, proč by měl být výsledkem vektorového součinu vektor a jak se tento vektor určí:

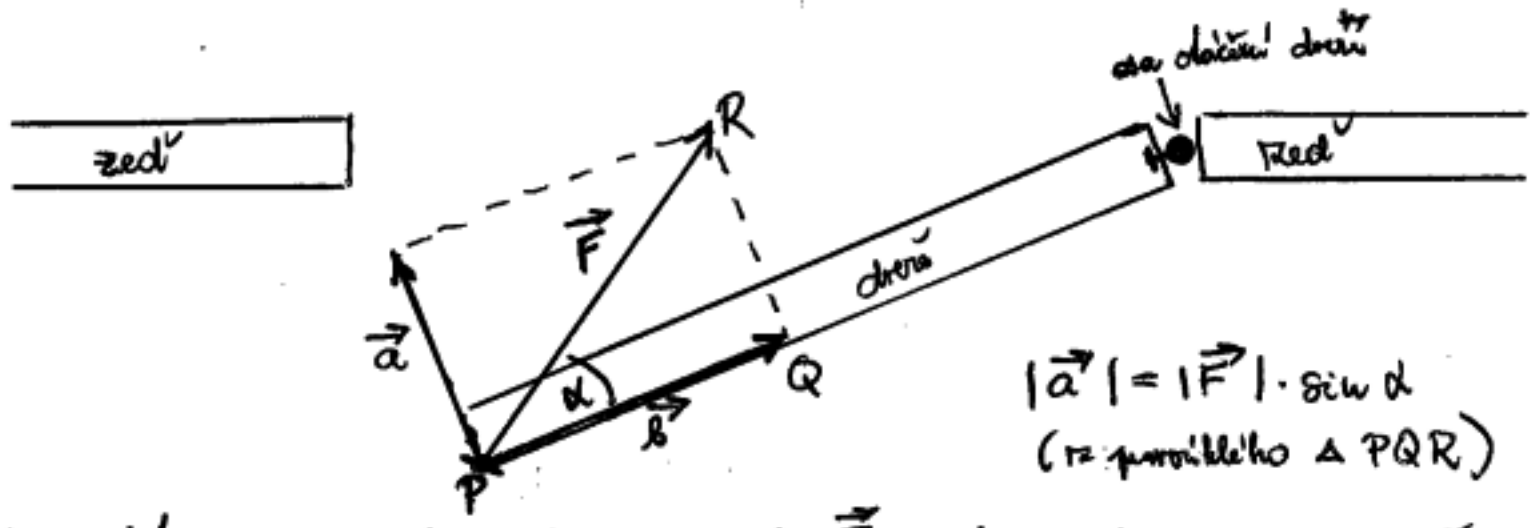
Představte si těleso, které se otáčí kolem pevné osy ... například dveře, které se otáčejí kolem svých pantů; dveře jsou otevřené a chcete je zavřít (abyste měli klid a nikdo vás v pokoji nerušil a mohli jste se učit fyziku).



A teď mi řekněte, co se stane, když budete do dveří (jako na obrázku... pohled shora) tlačit silou $\vec{F}$ přímo směrem k ose otáčení?

Možná mi řeknete, že chvíli se neděje nic, ale pokud po chvíli vychýlíte směr síly F (nebo popřípadě nějaký samozvanec trochu zatlačí), dveře s tebou rychle mrsknou a vy sebou mrsknete, popřípadě rozmlátíte skleněnou výplň dveří (pokud nějaká je).

Tohle jsem na mysli neměl. Předpokládejme, že silou $\vec{F}$ tlačíte nesmírně rozpačitě, ani na chvilinku ji nevychýlíte a dveře jsou těžké (podle obrázku... mají stejnou tloušťku jako zeď). Co se stane?
Ano, správně – nic. Ač působíte směrem k ose otáčení silou hodně velkou, dveřmi to prostě nepootočí. Jinými slovy, schopnost síly F dveřmi pootočit (= moment síly vzhledem k ose otáčení) je nulová. Aby došlo k pootočení dveří, musí síla působit tak trochu mimo osu otáčení.



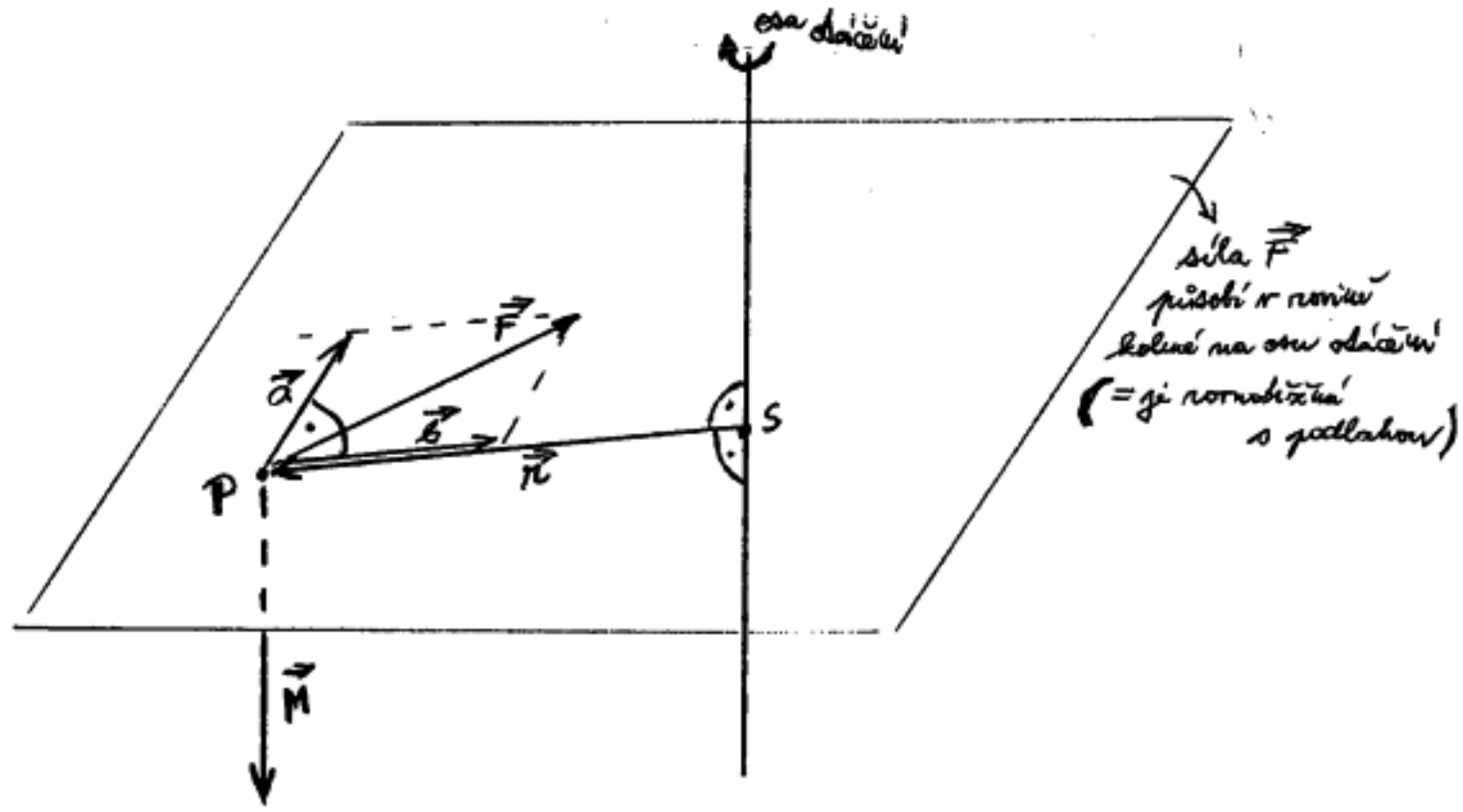
$|\vec{a}| = |\vec{F}| \cdot \sin\alpha$
(z pravoúhlého △ PQR)

Uvažujme situaci na dalším obrázku: síla $\vec{F}$ působí tak kousek mimo dveře, zejména pak směřuje mimo osu otáčení. (ovšem působí rovnoběžně s podlahou)
Sílu $\vec{F}$ lze chápat jako výslednici součtu dvou sil $\vec{a}$, $\vec{b}$, kde

$\vec{a}$ ... síla dyšného pomocníka působící kolmo na osu otáčení
(síla kolmá k ose otáčení dává dveřím největší otáčivý moment)

$\vec{b}$ ... síla hloupého pomocníka ... její otáčivý moment je nulový

Pokračujme dále k úplné definici momentu síly vzhledem k ose otáčení:



P ... bod působení síly $\vec{F}$

$\vec{PS} = \vec{r}$ ... takový vektor, že $|\vec{r}|$ = vzdálenost bodu P od osy otáčení

$\vec{M}$ ... moment síly $\vec{F}$ působící v bodě P vzhledem k dané ose otáčení
↳ označení z anglického moment = moment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{r} \times \vec{a} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{b}}_{} = \vec{r} \times \vec{a}$$

značka pro vektorový součin

moment vektoru směřujícího do osy otáčení je roven nule

... na moment $\vec{M}$ má vliv pouze složka $\vec{a}$ kolmá na vektor $\vec{r}$

Moment $\vec{M}$ síly $\vec{F}$ je vektorová veličina zadaná velikostí a směrem:

a) $$\boxed{|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\alpha} \quad (3.18)$$

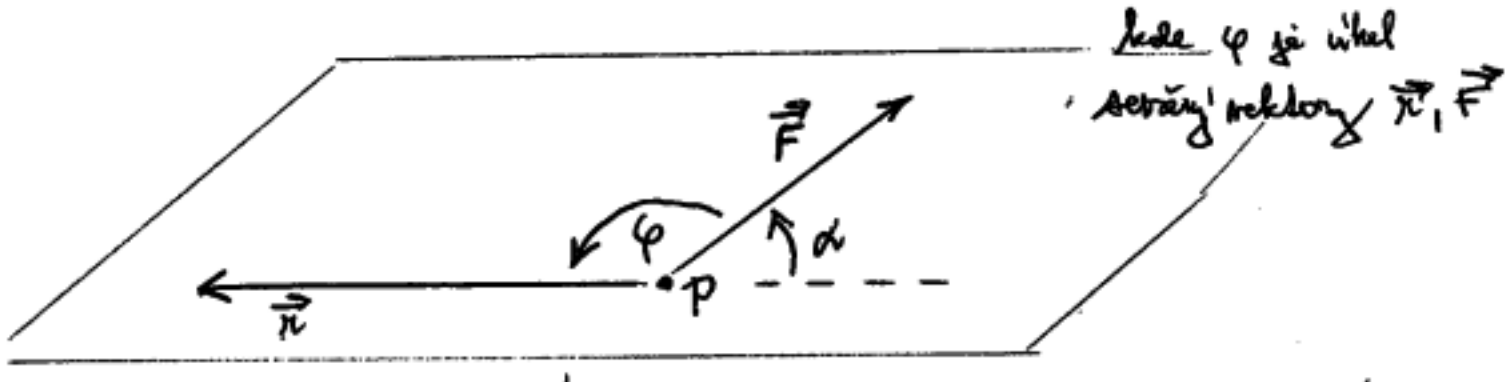
$|\vec{a}| = |\vec{F}| \cdot \sin\alpha$

čím je větší vzdálenost bodu P od osy otáčení, tím je větší i moment (proto i klika dveří se umisťuje co nejdále od osy otáčení)

Umístíme-li vektory $\vec{r}, \vec{a}$ do stejného počátečního bodu P, mohli bychom v našem případě psát

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\varphi ,$$

kde φ je úhel sevřený vektory $\vec{r}, \vec{F}$



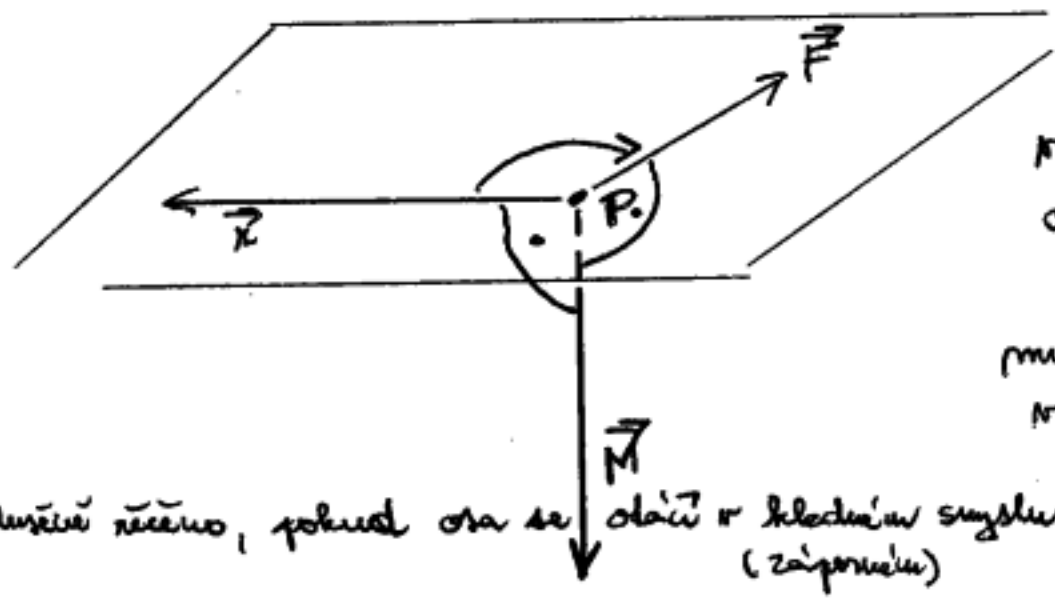
(platí totiž pro rozšířenou definici funkce sinus, že

$$\sin\alpha = \left\langle \begin{array}{l} \text{doplňkové: } \sin(\pi-\alpha) = \\ \text{stupňové: } \sin(180-\alpha) = \end{array} \right\rangle = \sin\varphi \quad)$$

Můžeme tedy (a obvykle se to tak dělá) brát sinus toho úhlu, který vektory $\vec{r}, \vec{F}$ svírají.

b) $$\boxed{\text{směr vektoru } \vec{M} \text{ je rovnoběžný s osou otáčení a je orientován tak, aby vektory } \underbrace{\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}}_{\text{záleží na pořadí vektorů}} \text{ tvořily tzv. pravotočivý systém (viz str. 55)}} \quad (3.19)$$

+ všechny musí vycházet z téhož bodu P



díváme-li se ve špičky vektoru $\vec{M}$, otáčení od 1. vektoru (... $\vec{r}$) ke 2. vektoru (... $\vec{F}$) musíme pozorovat v kladném smyslu

Zjednodušeně řečeno, pokud osa se otáčí v kladném smyslu (záporném), $\vec{M}$ směřuje nahoru (dolů)

Definice momentu síly vzhledem k ose otáčení je hodnota (známe už velikost i směr).

Podmínky (3.18), (3.19) jsou právě definičními podmínkami vektorového součinu, který budeme zapisovat značkou „×":

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Pro zmatení nepřítele ještě jednou definice vektorového součinu, a sice s jiným označením:

Vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ je nový vektor $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

s velikostí

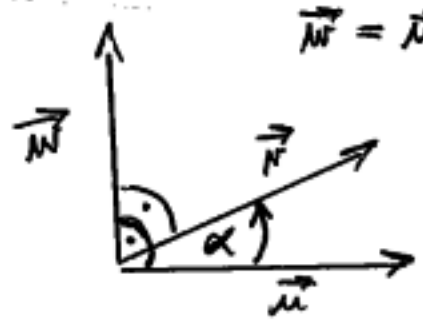
$$\boxed{|\vec{w}| = |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot \underbrace{|\vec{v}| \cdot \sin\alpha}_{\text{velikost průmětu vektoru } \vec{v} \text{ do směru kolmého na vektor } \vec{u}}} \qquad (3.20)$$

a směrem

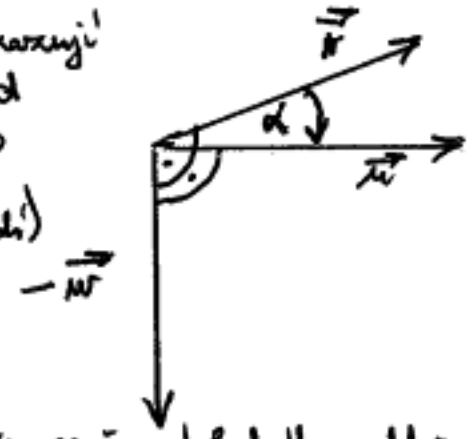
$$\boxed{\text{kolmým k rovině obsahující vektory } \vec{u}, \vec{v} \text{ tak, aby } \underbrace{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}}_{\text{záleží na pořadí}} \text{ byl } \underbrace{\text{pravotočivý systém}}_{\text{viz otázky}}} \qquad (3.21)$$

- Tedy záleží na pořadí vektorů $\vec{u}, \vec{v}$:

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ $\qquad\qquad$ $-\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u}$



šipky ukazují směr otáčení od prvního vektoru ke druhému (záleží na pořadí)



zaměníme-li pořadí vektorů ve vektorovém součinu, velikost výsledku zůstává stejná, ale změní se směr výsledného vektoru:

na rozdíl od skalárního součinu zde tedy neplatí tzv. komutativní zákon

$$(\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u})$$

konkrétně $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

- Výpočet vektorového součinu, jsou-li vektory $\vec{u}, \vec{v}$ zadány v kartézské soustavě souřadnic:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Pak $$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$ kde výrazu na pravé straně rovnosti se říká determinant.

Nebudeme se nyní zabývat tím, kde jinde se determinantu užívá, zde si jen představíme tzv. Sarrusovo pravidlo pro výpočet determinantu řádu 3:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix} =$$

Tyto sloupečky (1. a 2.) se zde připíšou pouze jako pomocné; až Sarrusovo pravidlo budeme lépe ovládat (což bude nejdříve za 4 roky), což je zde spíš nebudeme

$$= a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - c_2 \cdot b_3 \cdot a_1 - c_3 \cdot b_1 \cdot a_2$$

trojice spojené šipkou mezi sebou vynásobíme, součinům shora dolů přiřadíme kladné znaménko, zdola nahoru záporné, pak všech 6 součinů sečteme

Upravíme tedy Sarrusovo pravidlo pro náš případ:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix} = \vec{i} \cdot u_2 \cdot v_3 + \vec{j} \cdot u_3 \cdot v_1 + \vec{k} \cdot u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2 \cdot \vec{k} - v_2 \cdot u_3 \cdot \vec{i} - v_3 \cdot u_1 \cdot \vec{j} =$$

$$= \underbrace{\vec{i}\,(u_2 \cdot v_3 - v_2 \cdot u_3)}_{\text{násobení vektoru číslem}} + \underbrace{\vec{j}\,(u_3 \cdot v_1 - v_3 \cdot u_1)}_{\text{násobení vektoru číslem}} + \underbrace{\vec{k}\,(u_1 v_2 - v_1 u_2)}_{\text{násobení vektoru číslem}} =$$

$\vec{i} = (1,0,0)$
$\vec{j} = (0,1,0)$
$\vec{k} = (0,0,1)$

$$= (u_2 v_3 - v_2 u_3,\ u_3 v_1 - v_3 u_1,\ u_1 v_2 - v_1 u_2).$$ Dohromady máme

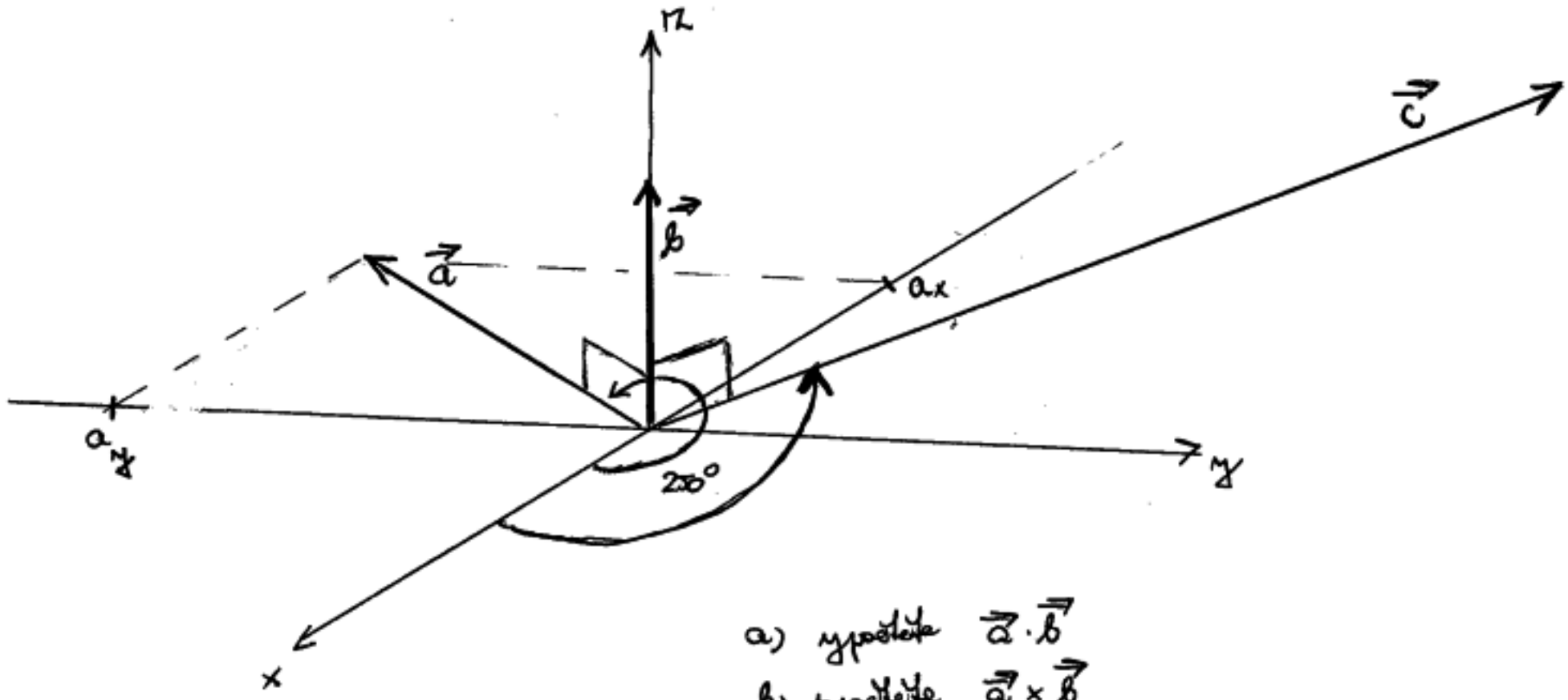
$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)} \quad (3.22)$$

Kontrola 5. $|\vec{c}| = 3$, $|\vec{d}| = 4$. Jaký úhel tyto vektory svírají, pokud

a) $\vec{c} \times \vec{d} = \vec{o}$ ... nulový vektor

b) $|\vec{c} \times \vec{d}| = 12$?

Př. 18. Vektor $\vec{a}$ leží v rovině xy, má velikost 18 jednotek a s kladným směrem osy x svírá úhel 250°. Dále $|\vec{b}| = 12$, $\vec{b} \parallel z$ (viz obrázek).



a) vypočtěte $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) vypočtěte $\vec{a} \times \vec{b}$

[řešení: ad a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ... skalární součin kolmých vektorů je vždy roven 0

ad b) označme $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Musí platit $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 90° = 18 \cdot 12 \cdot 1 = 216$

Vektor $\vec{c}$ musí být kolmý na rovinu určenou vektory $\vec{a}, \vec{b}$

(zejména tedy $\vec{b} \perp \vec{c}$, tj. vektor $\vec{c}$ bude ležet v rovině xy a svírat s kladným směrem osy x úhel o 90° menší než svírá vektor $\vec{a}$)

Jiný způsob výpočtu je pomocí souřadnic:

$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos 250° = 18 \cdot (-0{,}342) \doteq -6{,}156$

$a_y = |\vec{a}| \cdot \sin 250° = 18 \cdot (-0{,}939) \doteq -16{,}914$

$a_z = 0$ ... vektor $\vec{a}$ totiž leží v rovině xy

$\Rightarrow \vec{a} = (-6{,}156 \,;\, -16{,}914 \,;\, 0)$

$\vec{b} = (0, 0, 12)$

Pak $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6{,}156 \cdot 0 - 16{,}914 \cdot 0 + 0 \cdot 12 = \underline{\underline{0}}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ -6{,}156 & -16{,}914 & 0 & -6{,}156 & -16{,}914 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \end{array}\right| =$$

$$= -\vec{i} \cdot 12 \cdot 16{,}914 + \vec{0} + \vec{0} - \vec{0} - \vec{0} - \vec{j} \cdot 12 \cdot (-6{,}156) =$$

$$= (12 \cdot 16{,}914,\ 12 \cdot 6{,}156,\ 0) = \underline{\underline{(202{,}968;\ 78{,}72;\ 0)}}$$

]

<u>Př. 19.</u> Určete $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, pokud $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$

[řešení: $\vec{a} = (3, -4, 0)$, $\vec{b} = (-2, 0, 3)$, tj.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 3 & -4 & 0 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right| =$$

$$= -12 \cdot \vec{i} + \vec{0} + \vec{0} - 8\vec{k} - \vec{0} - 9\vec{j} = \underline{\underline{(-12, -9, -8)}}$$

tiž možný způsob zápisu je $\vec{c} = -12\vec{i} - 9\vec{j} - 8\vec{k}$.]

Otázky k opakování

Kapitola 3 : Vektory

52. Jaký je rozdíl mezi vektorem a skalárem?
53. Uveďte příklady vektorových veličin a skalárních veličin.

---

54. Jak lze graficky sečíst vektory $\vec{a}, \vec{b}$?
55. Co říká komutativní zákon pro sčítání vektorů? (3.2)
56. Co říká asociativní zákon pro sčítání vektorů? (3.3)
57. Jak lze graficky provést odčítání $\vec{a}-\vec{b}$?
58. Jak lze graficky vynásobit vektor $\vec{a}$ skalárem s?

---

59. Jak se spočítá práce potřebná na posunutí skříně podél stěny? (3.5)
60. Vyjádřete tuto práci, pokud $\vec{F}$ svírá se stěnou úhel α. (3.6)
61. Co je to kartézská soustava souřadnic v rovině a kartézská soustava souřadnic v prostoru?
62. Co je to záporný směr úhlů?
63. Co je to kladný směr (směru úhlů)?
64. Uveďte rozšířenou definici funkcí $\sin x$, $\cos x$ (v úhlové nebo obloukové míře)
65. Co je to plný úhel a přímý úhel? (a jakou má velikost v úhlové i v obloukové míře?)
66. Co je jednotkou stupňové a jednotkou obloukové míry?
67. Jak lze převést stupně na radiány a naopak? (3.7)
68. Nakreslete graf funkce $y=\sin x$.
69. Uveďte některé vlastnosti funkce $\sin x$ (D_f, H_f, $\sin(-x)=\dots$)
70. Uveďte vlastnosti inverzního procesu arcsiny (D, H, obrázek)
71. Nakreslete graf funkce $y=\cos x$.
72. Uveďte některé vlastnosti funkce $\cos x$ (D_f, H_f, $\cos(-x)=\dots$)
73. Uveďte vlastnosti inverzního procesu arccosy (D, H, obrázek)
74. Nakreslete graf funkce $y=\mathrm{tg}\,x$
75. Uveďte některé vlastnosti funkce $\mathrm{tg}\,x$ (D_f, H_f, $\mathrm{tg}(-x)=\dots$)
76. Uveďte vlastnosti inverzního procesu arctgy (D, H, obrázek)
77. Jak se definuje funkce $y=\mathrm{cotg}\,x$?

---

78. Jakým způsobem definujeme souřadnice vektoru v dané kartézské soustavě? (3.12)

79. Co jsou to vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$?

80. Jak se počítá velikost vektoru $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$? (3.13)

81. Jak algebraicky sčítáme vektory?

82. Jak algebraicky provedeme vynásobení vektoru skalárem?

83. Jak se definuje skalární součin vektorů? (3.15)
(pomocí úhlu φ)

84. Jak lze určit práci při posunutí skříně pomocí skalárního součinu? (3.16)

85. Je skalární součin komutativní operací?

86. Jak lze spočítat skalární součin vektorů pomocí souřadnic? (3.17)

87. Jak lze určit úhel svíraný vektory $\vec{a}, \vec{b}$?

88. Jak lze určit moment síly $\vec{F}$ vzhledem k ose otáčení?
[velikost ... $|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}|$ složka síly kolmá na spojnici působiště s osou
směr ... matice, pokud osa se otáčí v kladném smyslu]

89. Jak se definuje vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$? (3.20, 3.21)

90. Je vektorový součin komutativní operací?

91. Jak vypočteme determinant o 3×3 prvcích pomocí Sarrusova pravidla? (3.21)

92. Odvoďte $\vec{u} \times \vec{v}$ pomocí souřadnic. (3.22)

93. Jak lze určit moment síly pomocí vektorového součinu?

Přehled otázek ke kapitole 3

M4. Sčítání vektorů, násobení vektoru skalárem – graficky

M5. Stupňová a oblouková míra, funkce $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

M6. Rozklad vektoru na součet.

M7. Sčítání vektorů, násobení vektoru skalárem – algebraicky

M8. Skalární a vektorový součin vektorů

Kapitola 4 : Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb

?

Jeden z cirkusových kousků rodiny Zacchiniových spočíval v tom, že se jeden z nich nechal vystřelit z děla, přeletěl 3 ruská kola v zábavním parku a překonal vzdálenost 68,6 m.

- jak mohl vědět, že dosáhne takové výšky, aby ruská kola přeletěl?
- jak mohl vědět, kam umístit záchrannou síť?

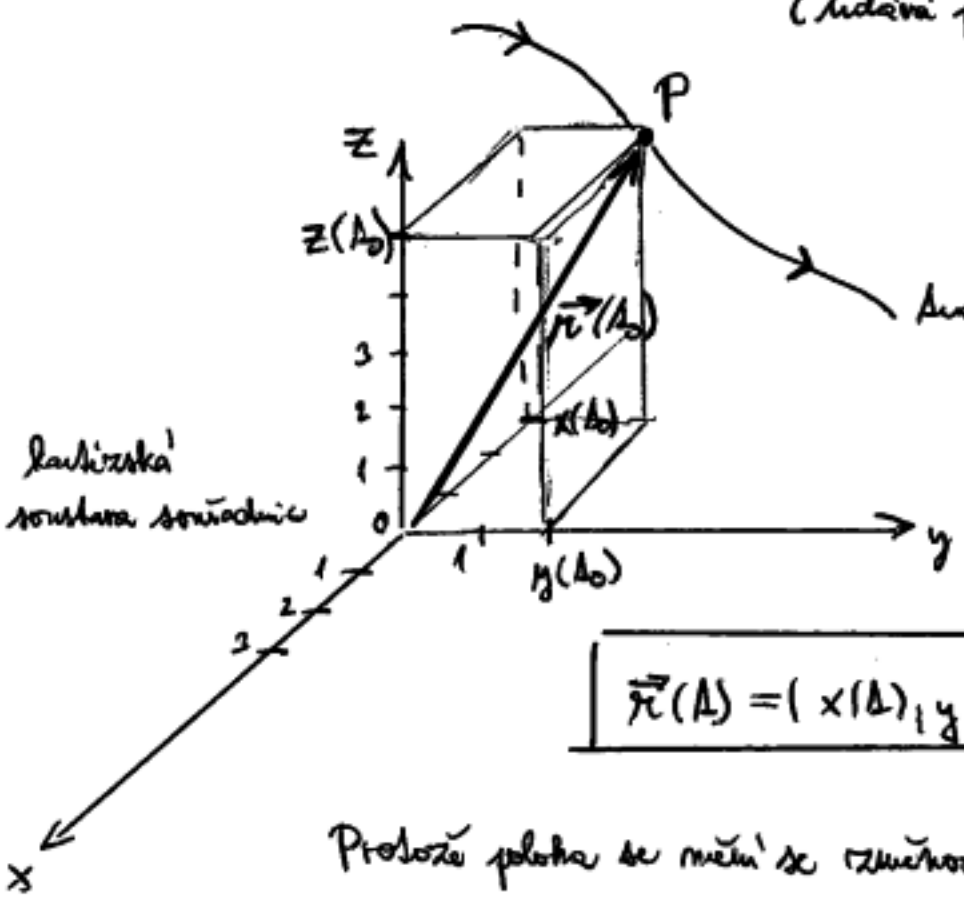
4.1. Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb

V kapitole 2 jsme se zabývali popisem přímočarého pohybu – nyní rozšíříme tyto úvahy a pojmy na popis pohybu v rovině nebo prostoru. Situace tedy bude pochopitelně složitější – ale brzo ji zvládneme s využitím vektorových veličin, s jejichž vlastnostmi jsme se seznámili v kapitole 3.

4.2. Poloha a posunutí

Při pohybu po přímce nám na popis polohy v čase t stačila funkce $x(t)$.
Nyní při obecném pohybu v prostoru budeme potřebovat vektor polohy:

poloha hmotného bodu v čase t ... vektorová funkce $\vec{r}(t)$
(udává polohu bodu vzhledem k počátku soustavy souřadnic)



trajektorie = dráha pohybu částice

v okamžiku t_0 je částice v bodě P

$$\boxed{\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))} \quad (4.1)$$

Protože poloha se mění se změnou času t, jednotlivé souřadnice $x(t), y(t), z(t)$ vektoru $\vec{r}(t)$ se také mění.
(na obrázku $\vec{r}(t_0) = (-3; 2; 5)$)

Dalo by se říci, že poloha hmotného bodu v prostoru je oproti kapitole 2 pojmu trojnásobně složitější, protože pohyb hmotného bodu popisujeme pomocí tří funkcí $x(t), y(t), z(t)$ proměnné t.

Vektoru polohy $\vec{r}(t)$ se také někdy říká průvodič (anglicky radius = poloměr ...odtud i mezinárodní označení $\vec{r}$). Průvodič tedy spojuje pohybující se částici s počátkem souřadné soustavy.

myslíme kulové plochy se středem v počátku, na níž leží daný bod

Posunutí ... změna polohy z bodu $\vec{r}(t_1) = (x_1, y_1, z_1)$
do bodu $\vec{r}(t_2) = (x_2, y_2, z_2)$

... značíme $\Delta\vec{r}$:

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)} \qquad (4.2)$$

Dosazením souřadnic jednotlivých průvodičů dostáváme

$$\boxed{\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)} \qquad (4.3)$$

Tedy i posunutí v prostoru je vektorovou veličinou. V souladu s kapitolou 2 budeme označovat $\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta y = y_2 - y_1$

$\Delta z = z_2 - z_1$

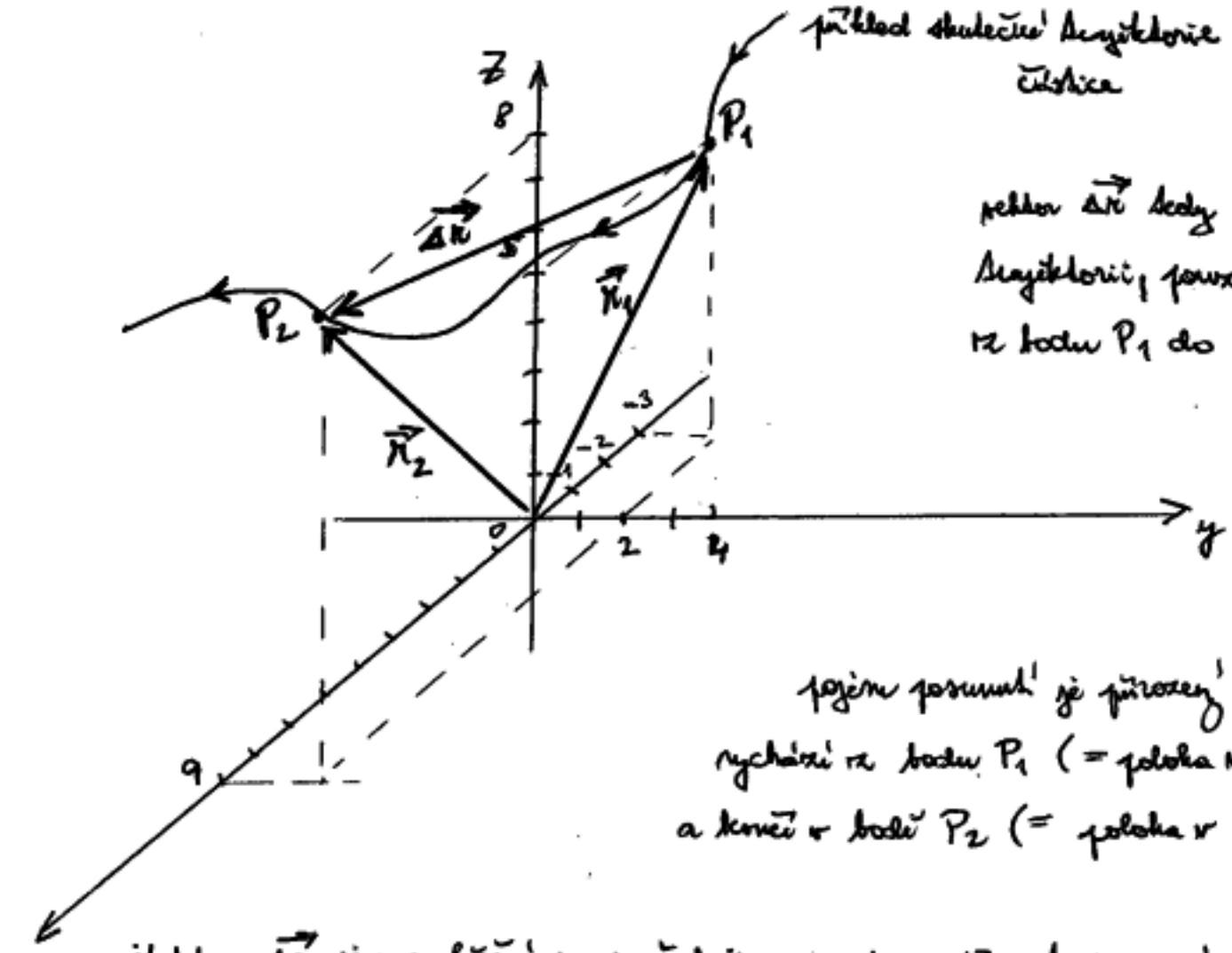
$(\Delta t = t_2 - t_1)$, tj. $\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

Př. 20. $\vec{r}(t_1) = -3\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j} + 5\cdot\vec{k}$, $\vec{r}(t_2) = 9\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j} + 8\cdot\vec{k}$. Určete posunutí částice v časovém intervalu od t_1 do t_2.

[řešení: $\vec{r}_1 = (-3; 2; 5)$; $\vec{r}_2 = (9; 2; 8)$

$\Delta\vec{r} = (9-(-3), 2-2, 8-5) = \underline{\underline{(12, 0, 3)}}$ podle vztahu (4.3).

Důležitá je geometrická názornost, proto nakreslíme obrázek:



vektor $\vec{\Delta r}$ tedy nezobrazuje skutečnou trajektorii, pouze informuje o posunutí z bodu P_1 do bodu P_2

pojem posunutí je přirozený: vektor posunutí $\vec{\Delta r}$ vychází z bodu P_1 (= poloha v okamžiku t_1) a končí v bodě P_2 (= poloha v okamžiku t_2).

Vektor $\vec{\Delta r}$ je rovnoběžný se souřadnicovou rovinou xz – to nepoznáme ani tak z obrázku, ale spíše z toho, že y-ová souřadnice vektoru je rovna 0.

<u>Kontrola 1.</u> a) Netopýr vyletěl z místa o souřadnicích [−2 m, 4 m, −3 m] a po chvíli opět usedl, tentokrát v místě [6 m, −2 m, −3 m]. Vyjádřete vektor jeho posunutí $\Delta\vec{r}$ pomocí jednotkových vektorů $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

b) Zjistěte, zda je vektor $\vec{\Delta r}$ rovnoběžný s některou souřadnicovou rovinou nebo osou

4.3. Průměrná a okamžitá rychlost

V jednorozměrném případě (při přímočarém pohybu) jsme definovali průměrnou rychlost vztahem (2.2): $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$.

V případě pohybu v trojrozměrném prostoru je vztah podobný:

$\bar{\vec{v}}$ ... průměrná rychlost pohybu částice v časovém intervalu $\langle t_1; t_2 \rangle$

$$\boxed{\bar{\vec{v}} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}} \qquad (4.4)$$

→ celkové posunutí je vydíleno celkovým časem

Protože posunutí je vektorová veličina, i průměrná rychlost je vektor:

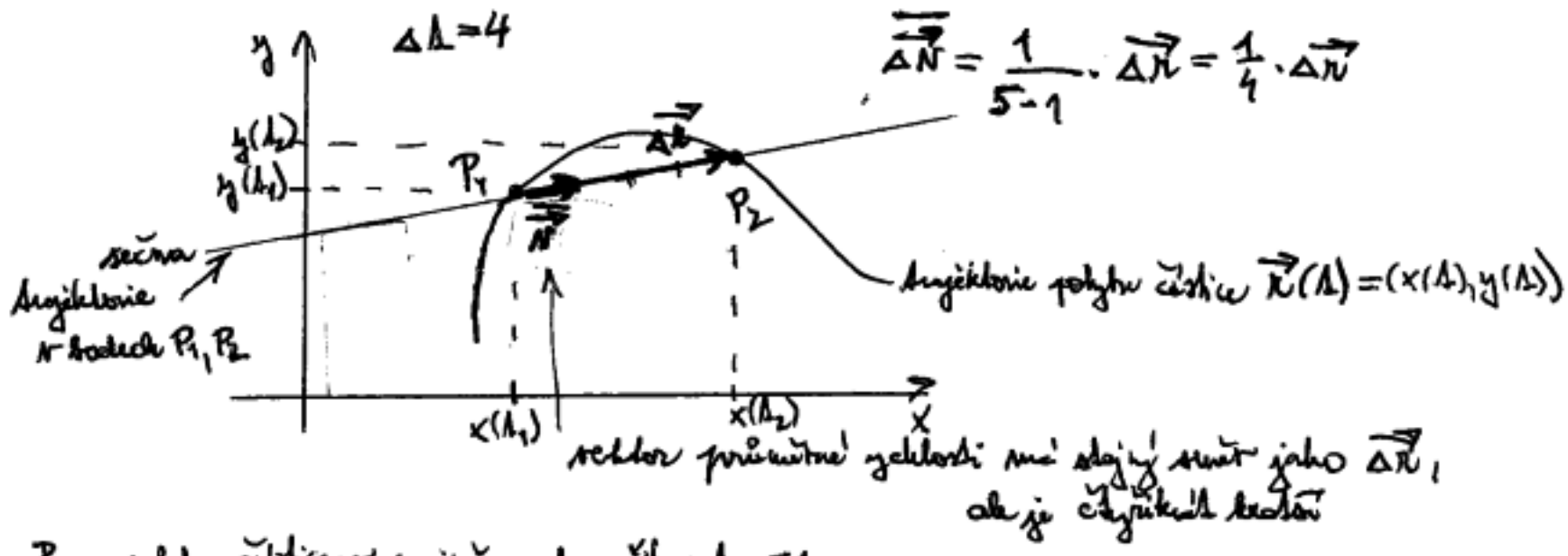
$$\boxed{\bar{\vec{v}} = \underbrace{\frac{1}{t_2 - t_1}}_{\text{číslo}} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)}_{\text{vektor}}} \qquad (4.5)$$

- Ve vztazích (4.4), (4.5) se jedná o násobení vektoru číslem (= skalárem), výsledkem je tedy vektor:

$$\overline{\vec{v}} = \frac{1}{t_2-t_1}\cdot\left(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\right) = \left(\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1},\ \frac{y_2-y_1}{t_2-t_1},\ \frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}\right).$$

pruh nad šipkou znamená, že se jedná o průměrnou rychlost

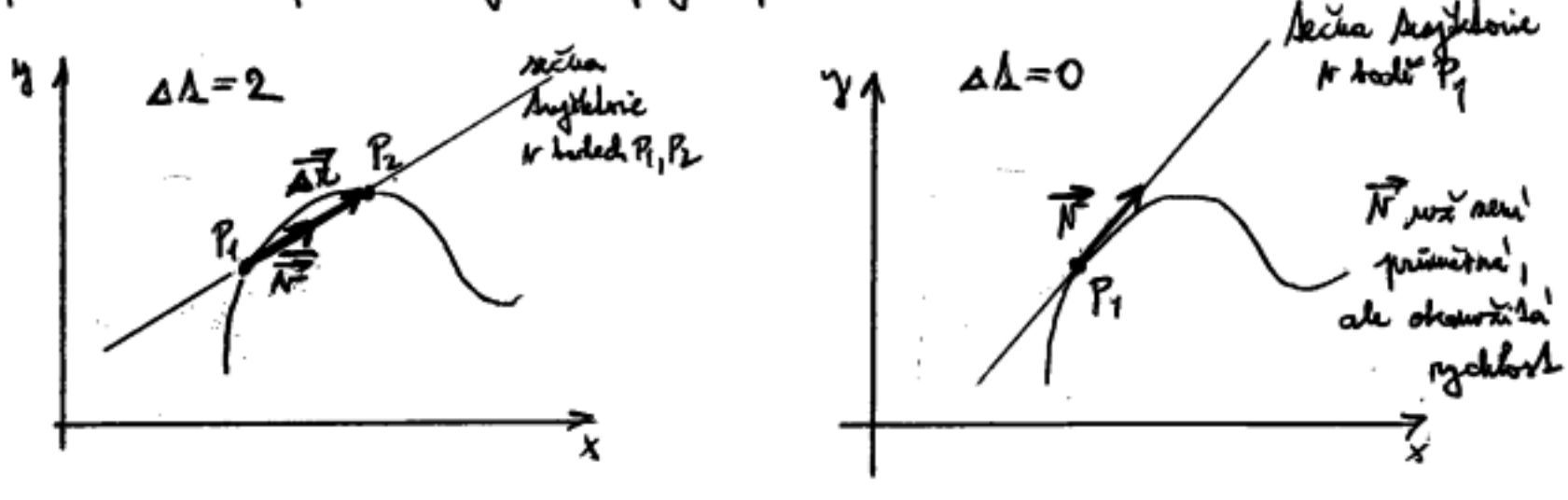
- Další věcí, kterou ze vztahů (4.4), (4.5) vidíme, je to, že vektor průměrné rychlosti $\overline{\vec{v}}$ je násobkem (přesněji: skalárním násobkem) vektoru posunutí $\Delta\vec{r}$. To znamená, že oba vektory mají stejný směr. Nakreslíme obrázek (pro jednoduchost pouze ve dvourozměrném prostoru):



(P_1 ... poloha částice v rovině v okamžiku $t_1 = 1$
P_2 ... poloha částice v rovině v okamžiku $t_2 = 5$) $\Rightarrow \Delta t = 4$

- Z obrázku je vidět, že stejně jako v případě přímočarého pohybu zde vystupuje jistá sečna – rozdíl je v tom, že zatímco u přímočarého pohybu šlo „sekání" funkce $x(t)$ polohy v závislosti na čase (a bodík se pohyboval po souřadné ose x), nyní sečna „rozsekává" skutečnou trajektorii, po které se částice pohybovala. A podobně vektor průměrné rychlosti má směr sečny.

Udělejme nyní podobnou věc jako u přímočarého pohybu – zkraťme časový interval Δt, v průběhu kterého průměrnou rychlost pohybu počítáme:



Na posledním obrázku předchozí stránky jsme už provedli limitní proces pro Δt jdoucí k nule ($\Delta t \to 0$). Vektor posunutí $\Delta\vec{r}$ zde nemá smysl kreslit, protože k různému posunutí nedochází – ale má smysl vektor $\vec{v}$ ve směru tečny ke trajektorii, který udává okamžitou rychlost pohybu částice:

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}} \qquad (4.6)$$

Okamžitá rychlost $\vec{v}$ je tedy stejně jako u přímočarého pohybu derivací polohy podle času. Protože poloha $\vec{r}(t)$ je vektor, i okamžitá rychlost $\vec{v}(t)$ je vektor určený

– směrem ... udává, v jakém směru se v daném okamžiku částice pohybuje

– velikostí ... udává rychlost pohybu částice

Vektor okamžité rychlosti $\vec{v}(t)$ má směr tečny ke trajektorii $\vec{r}(t)$ v okamžiku t.

Označme

$$\boxed{\vec{v}(t) = \left(v_x(t), v_y(t), v_z(t)\right)} \qquad (4.7)$$

Ze vztahu (4.6) dostáváme pro $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left(x(t), y(t), z(t)\right) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right),$$

čili platí

$$\boxed{v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \quad v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}} \qquad (4.8)$$

souřadnice vektoru okamžité rychlosti dostaneme derivací souřadnic vektoru polohy $\vec{r}(t)$

- Vraťme se nyní k našemu poslednímu obrázku na straně 75:

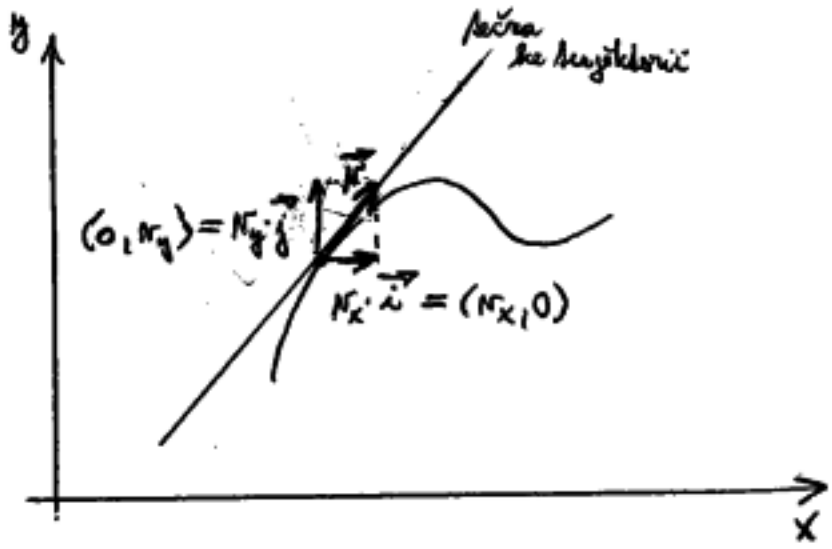
  zde „se nacházíme" v rovině xy, tj. vektory polohy a okamžité rychlosti mají dvě souřadnice: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

  $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$

Jak už bylo naznačeno v minulé kapitole, souřadnice $v_x(t)$, $v_y(t)$ mají také svůj geometrický význam:

protože $\vec{v}(t) = v_x(t)\cdot\underset{(1,0)}{\vec{i}} + v_y(t)\cdot\underset{(0,1)}{\vec{j}}$ je rozklad vektoru

na součet vektorů rovnoběžných se souřadnými osami; délky těchto vektorů jsou $v_x(t)$, $v_y(t)$:



Terminologie, kterou budeme používat:

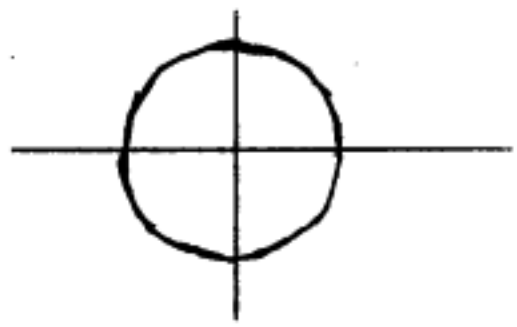
v_x = souřadnice vektoru $\vec{v}$ (= číslo)

$v_x \cdot \vec{i}$ = složka vektoru $\vec{v}$ (= vektor)

vektor $\vec{v}$ = součet obou složek (= vektorů)

(někdy se nepřesně pojmu složky a souřadnice zaměňují a v_x označuje vektor; ovšem smysl je zřejmý, o čem je řeč)

<u>Kontrola 2.</u> Částice se pohybuje po kružnici a) ve směru
b) proti směru otáčení hodinových ručiček

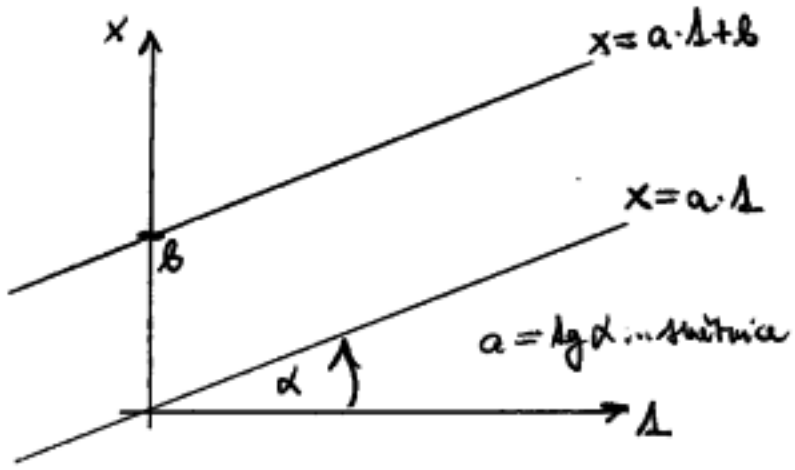


a v jistém okamžiku má rychlost $\vec{v} = (2\,ms^{-1}, -2\,ms^{-1})$. Určete, ve kterém bodě na kružnici se nachází.

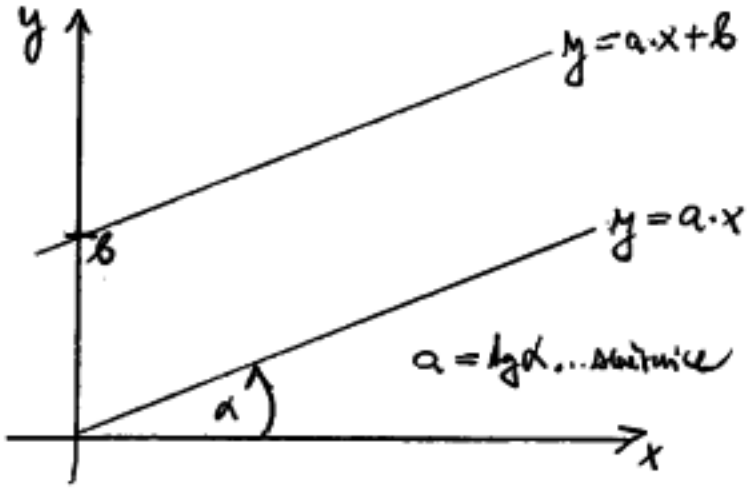
Na tomto místě bude asi užitečné zmínit se o tzv. parametrickém vyjádření přímky v rovině:

V kapitole 2 jsme se seznámili se směrnicovým tvarem přímky v rovině proměnných t, x: $x = a \cdot t + b$

(v rovině proměnných x, y budeme uvažovat tvar $y = a \cdot x + b$, snad záměna písmen v označení nebude na závadu)



proměnné t, x



proměnné x, y

jediný rozdíl je v označení souřadných os

Parametrické vyjádření přímky (v rovině)

Přímka je pro parametrické vyjádření jednoznačně určena jedním svým bodem $A=[a_1,a_2]$ a směrovým vektorem $\vec{u}=(u_1,u_2)$:

Libovolný bod $X=[x,y]$ ležící na přímce p lze popsat parametrickými rovnicemi

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a_1 + t\cdot u_1 \\ y &= a_2 + t\cdot u_2 \end{aligned}}$$

souřadnice vektoru ve směru přímky

kde t je tzv. parametr probíhající celou množinu reálných čísel

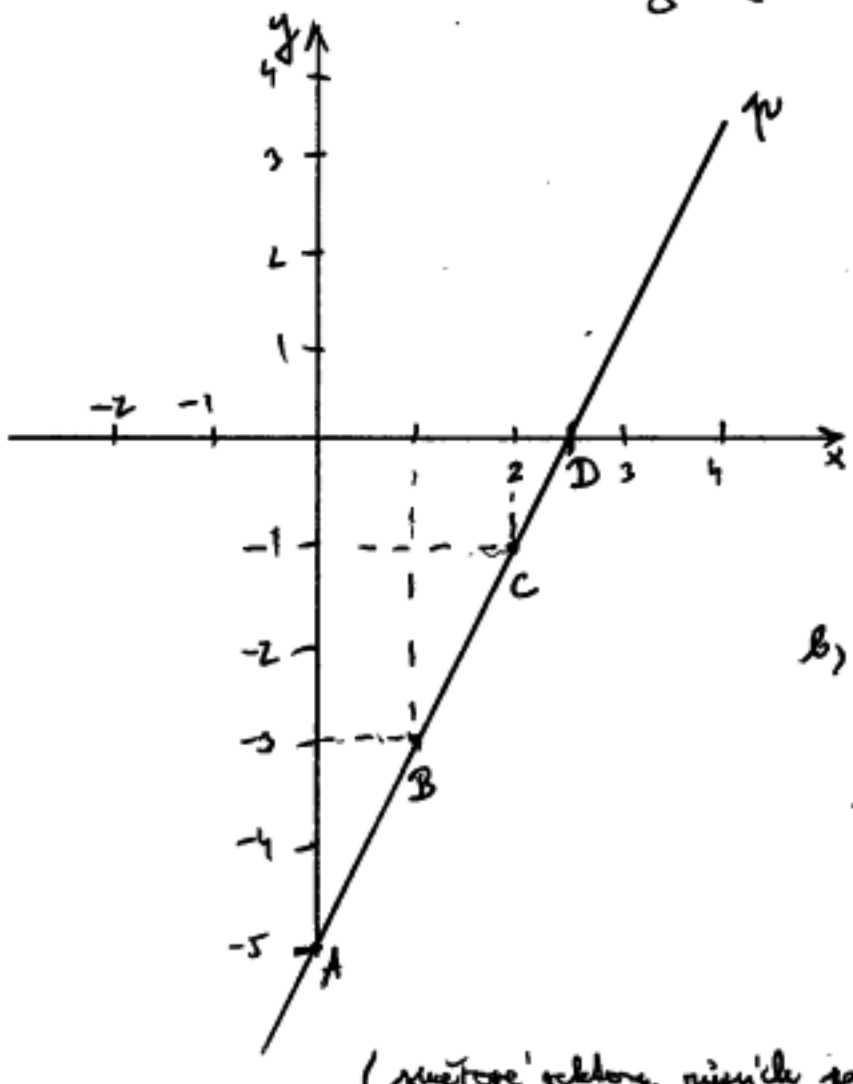
souřadnice libovolného bodu přímky

souřadnice bodu $A\in p$

za bod A lze zvolit libovolný bod přímky p
za směrový vektor lze volit libovolný (nenulový) násobek vektoru $\vec{u}$

To znamená, že pro jednu přímku existuje více různých parametrických vyjádření

Například směrnicový tvar přímky $y=2x-5$ je jediný, ale parametrických vyjádření této přímky existuje více:



a) zvolme bod $A=[0;-5]$
a vektor $\vec{AB}=(1-0,-3+5)=(1;2)$
pak parametrické rovnice jsou ve tvaru

$$\boxed{p:\quad \begin{aligned} x &= 0 + t\cdot 1 \\ y &= -5 + t\cdot 2 \end{aligned}}$$

b) zvolme bod $B=[1;-3]$
a vektor $AC=(2-0,-1+5)=(2;4)$
pak

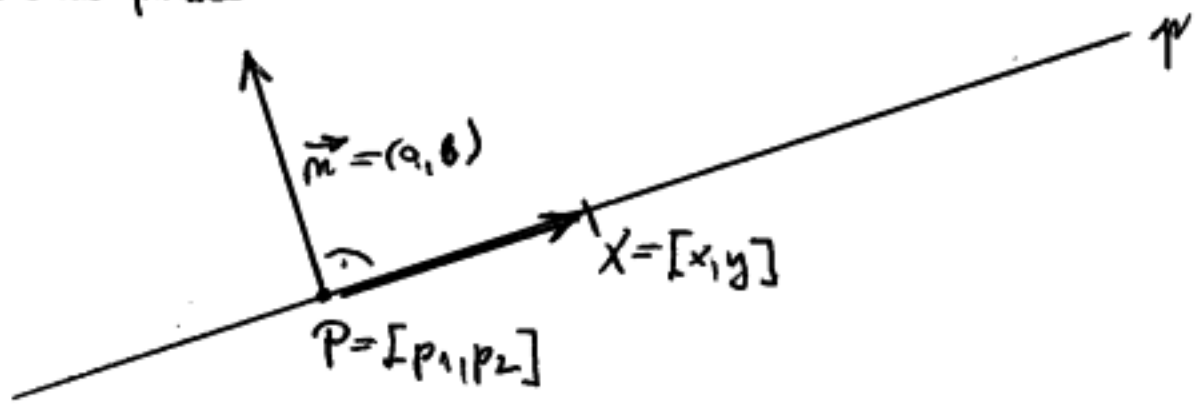
$$\boxed{p:\quad \begin{aligned} x &= 1 + t\cdot 2 \\ y &= -3 + t\cdot 4 \end{aligned}}$$

(směrové vektory různých parametrických vyjádření přímky se musí lišit o násobek: v našem případě $(2;4)=2\cdot(1;2)$)

Poslední významný tvar přímky, se kterým se občas setkáme, je tzv.

obecný tvar přímky

Uvažujme přímku p a vektor $\vec{n}$ k ní kolmý... takový vektor se nazývá normálový vektor k dané přímce



Napišme vztah, který musí splňovat každý bod X ležící na přímce p:
Vektory $\vec{n}$, $\vec{PX}$ musí být kolmé, tedy jejich skalární součin je roven nule:

$$\vec{n}\cdot\vec{PX}=0$$
$$(a,b)\cdot(x-p_1,y-p_2)=0$$
$$ax-ap_1+by-bp_2=0$$ ... označíme-li $c=-ap_1-bp_2$, tak platí

$$\boxed{ax+by+c=0}$$

tomuto tvaru přímky říkáme obecný

Je zajímavé, že koeficienty a,b u neznámých x,y jsou souřadnice normálového vektoru (= vektoru kolmého k přímce)

A takto se obecná rovnice přímky nalezne: chceme-li například napsat obecnou rovnici přímky procházející body $A=[1;3]$, $B=[-2;1]$,

1) nalezneme její směrový vektor: $\vec{u}=\vec{AB}=(-3,-2)$
2) normálový vektor (= vektor kolmý ke směrovému) určíme tak, aby
   $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ ... stačí zaměnit pořadí souřadnic vektoru $\vec{u}$ a u jedné z nich změnit znaménko: např. $\vec{n}=(2;-3)$
   obecná rovnice má tvar $2x-3y+c=0$
3) zbývá určit konstantu c dosazením některého bodu přímky do rovnice, např. bodu $A=[1;3]$:
   $A\in p$: $2\cdot1-3\cdot3+c=0 \Rightarrow \underline{c=7}$, tj.
   $2x-3y+7=0$

Každá jiná obecná rovnice pro tutéž přímku vznikne jako násobek: např. $4x-6y+14=0$
(tj. obecná rovnice je určena jednoznačně až na svůj násobek)

4.4. Průměrné a okamžité zrychlení

Podobně jako u přímočarého pohybu se dále definují i pojmy
průměrné zrychlení a okamžité zrychlení.

Pokud částice se v okamžiku t_1 pohybuje rychlostí $\vec{v}_1$
a v okamžiku t_2 rychlostí $\vec{v}_2$, tak průměrnou změnu rychlosti nazveme průměrným zrychlením:

$$\boxed{\vec{\bar{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1}\left(v_{2x} - v_{1x}, v_{2y} - v_{1y}, v_{2z} - v_{1z}\right)} \quad (4.9)$$

Limitním procesem pro stále kratší interval $\langle t_1; t_2 \rangle$ dospějeme k okamžitému zrychlení:

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}, \frac{dv_z(t)}{dt} \right)} \quad (4.10)$$

Tedy u obecného pohybu v prostoru i zrychlení a průměrné zrychlení jsou vektory.
Označíme-li u okamžitého zrychlení

$$\boxed{\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)}, \quad (4.11)$$

ze (4.10) a (4.11) plyne

$$\boxed{a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}, \quad a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt}, \quad a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt}} \quad (4.12)$$

Konkrétní příklad vektoru zrychlení a jeho rozkladu do složek uvidíme ve dvourozměrném případě v některých příkladech této kapitoly, které budou následovat
(v příkladu 22, ale také v odstavci 4.7).

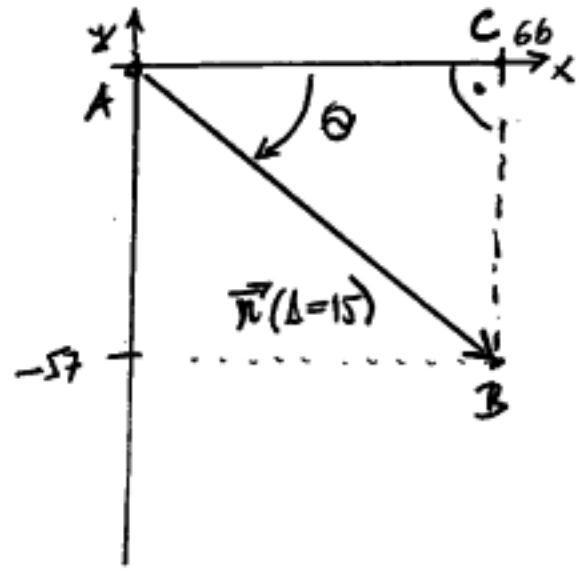
Př. 21. Králík vběhl na parkoviště, kde si předtím hrály děti a nakreslily zde křídou dvě školní přímky (můžeme je nyní zvolit za osy x, y soustavy souřadnic). Okamžitá poloha králíka vzhledem k této soustavě je zadána vektorem $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$,
kde
$$x(t) = -0{,}31 \cdot t^2 + 7{,}2 \cdot t + 28,$$
$$y(t) = 0{,}22\, t^2 - 9{,}1 \cdot t + 30.$$
Čas t je měřen v sekundách a souřadnice x, y v metrech.

a) určete velikost a směr polohového vektoru $\vec{r}(t)$ v okamžiku $t=15\,s$;

b) určete polohu $\vec{r}(t)$ v okamžicích $t=0\,s$, $t=5\,s$, $t=10\,s$, $t=20\,s$, $t=25\,s$

a schematicky vykreslete jeho trajektorii;

[řešení: ad a) $\vec{r}(t=15)=(66{,}25;-57)$, tj. $|\vec{r}(15)|=\sqrt{66{,}25^2+57^2}\doteq \underline{\underline{87{,}4}}\,m$



z △ ABC máme $\operatorname{arctg}\frac{57}{66}=40{,}8°$

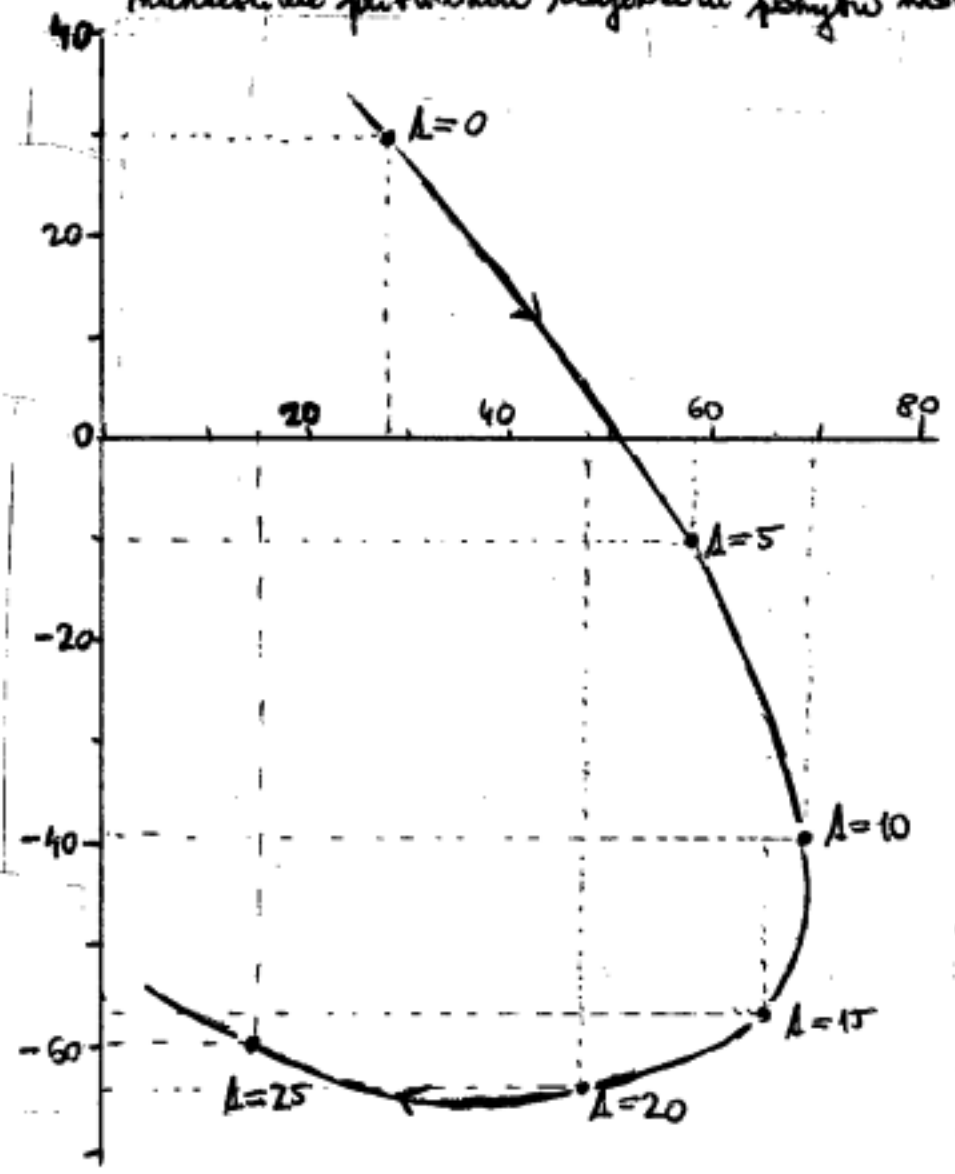
ale protože úhel Θ je v záporném smyslu, bereme jej se znaménkem minus: $\underline{\underline{\Theta=-40{,}8°}}$

(souřadnicově $\vec{r}(15)=(66{,}25;-57)$)

ad b) dosazováním různých časových okamžiků za t dostáváme tabulku

t	$x(t)$	$y(t)$
0	28	30
5	56,25	−10
10	69	−39
15	66,25	−57
20	48	−64
25	14,25	−60

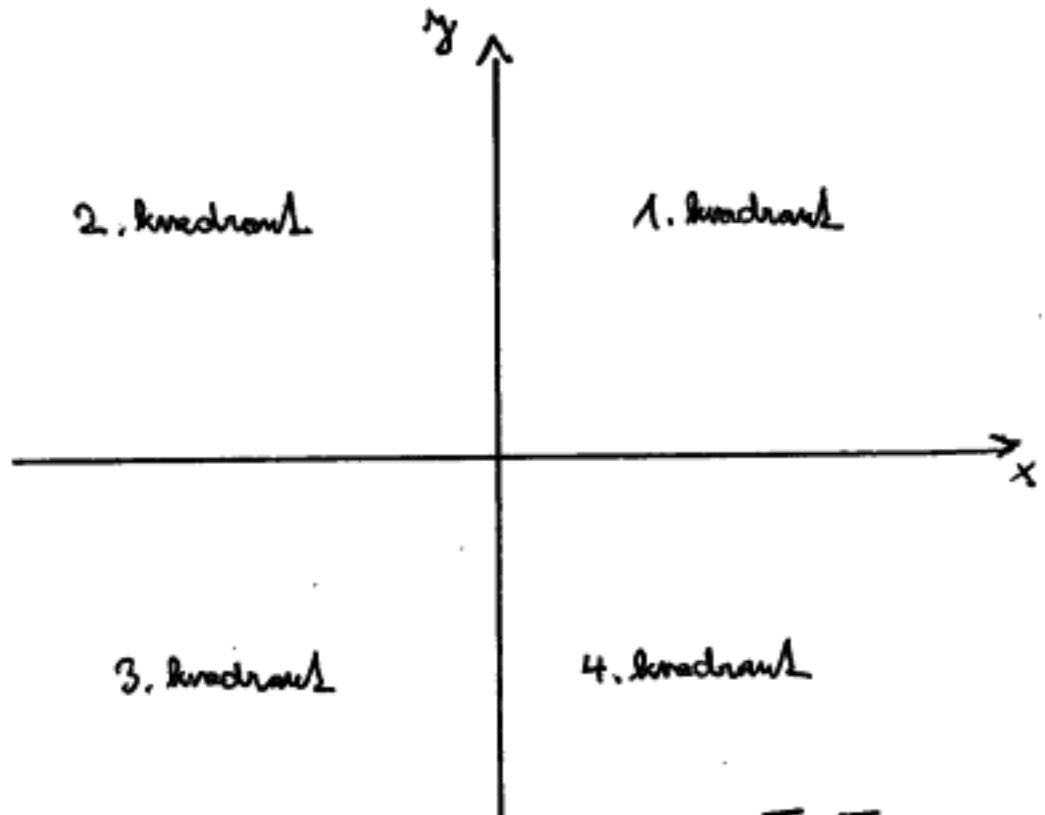
podle souřadnic bodů $[x(t);y(t)]$ nakreslíme přibližnou trajektorii pohybu kuličky:



]

Nyní budiž řečeno (a pro ty, co už znají, zopakováno) jedno často užívané označení:

Rovinu souřadné osy x, y rozdělují na čtyři tzv. kvadranty:



pořadí kvadrantů je počítáno od úhlu $\varphi = 0$ v kladném smyslu

Funkce arctg najde úhel z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ rad $= (-90; 90)^\circ$. Tedy v části a) předchozího příkladu jsme mohli určit úhel Θ bodu $B = [66{,}25; -57]$ přímo jako

$$\Theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-57}{66{,}25}\right) \doteq -40{,}8^\circ.$$

Ale není vždy tak docela pravda, že úhel určený bodem $[x, y]$ určíme pomocí $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ... to platí pouze pro $x > 0$. Obecně bod $B = [x, y]$ určuje úhel

$$\Theta = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \ldots & \text{pokud } x > 0 \ (= 1. \text{ a } 4. \text{ kvadrant, bez osy } y) \\ 90^\circ = \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \ (= \text{kladná část osy } y) \\ 270^\circ = \frac{3\pi}{2} & x = 0, y < 0 \ (= \text{záporná část osy } y) \\ \text{není definováno} \ldots & x = 0, y = 0 \ (= \text{počátek soustavy souřadnic}) \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi \ldots & x < 0, y \geq 0 \ (2. \text{ kvadrant, bez } y_+, \text{ navíc } x_-) \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi \ldots & x < 0, y < 0 \ (3. \text{ kvadrant, bez } y_-, \text{ bez } x_-) \end{cases}$$

Tímto způsobem najdeme pro daný bod (kromě počátku) úhel Θ z intervalu $(-\pi, \pi\rangle$, který svírá polohový vektor bodu s kladným směrem osy x.

Př. 22. a) Určete velikost a směr vektoru rychlosti $\vec{v}(t)$ pohybu kuličky z předchozího příkladu v okamžiku $t = 15\,s$.

b) Určete velikost a směr vektoru zrychlení $\vec{a}(t)$ pohybu kuličky z předchozího příkladu v okamžiku $t = 15\,s$

[řešení: ad a) Podle vztahu (4.8) dostáváme

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}\left(x(t), y(t)\right) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right) =$$

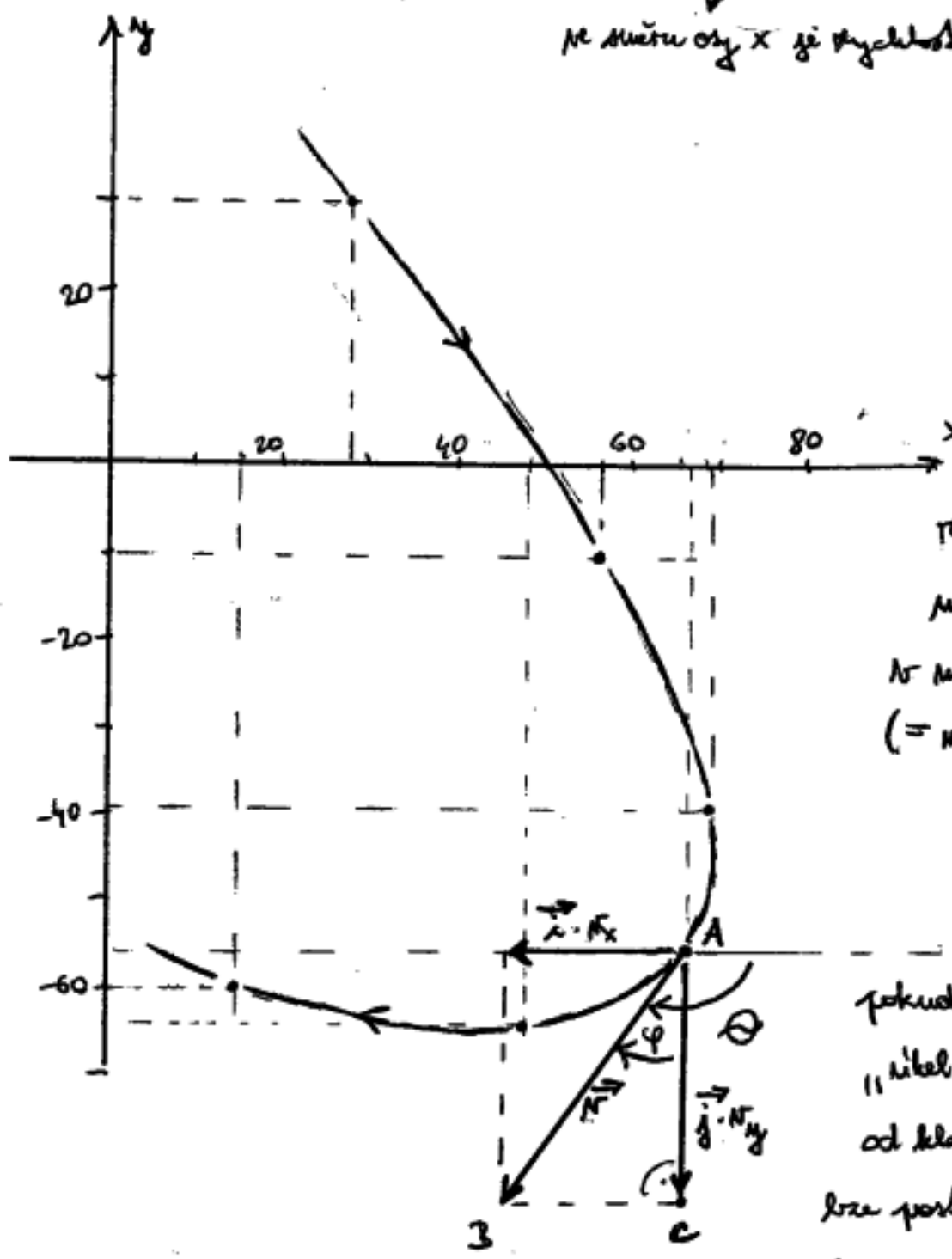
$$= \left(\frac{d}{dt}\left(-0{,}31\cdot t^2+7{,}2\cdot t+28\right), \frac{d}{dt}\left(0{,}22\cdot t^2-9{,}1\cdot t+30\right)\right) =$$

$$= \left(-0{,}62\,t+7{,}2\ ;\ 0{,}44\,t-9{,}1\right).$$ Nyní pro $t=15$ máme

$$\vec{v}(15) = \left(-0{,}62\cdot 15+7{,}2\ ;\ 0{,}44\cdot 15-9{,}1\right) = \left(-2{,}1\ ;\ -2{,}5\right)$$

ve směru osy y je rychlost $-2{,}5\ m\cdot s^{-1}$

ve směru osy x je rychlost $-2{,}1\ m\cdot s^{-1}$



rychlost $\vec{v}$ v okamžiku $t=15$ má směr tečny ke trajektorii v místě, kde se kuželík právě nachází (= v bodě A)

pokud bychom chtěli určit „úhel vektoru", tj. jeho odklon Θ od kladného směru osy x, lze postupovat jedním z následujících dvou způsobů:

(i) pomocí vzorce ze strany (82):

posuneme-li vektor $\vec{v}$ do počátku, ukazuje do třetího kvadrantu, tj.

$$\Theta = \operatorname{arctg}\frac{v_y}{v_x} - 180^\circ = \operatorname{arctg}\frac{-2{,}5}{-2{,}1} - 180^\circ = \underline{\underline{-130{,}03^\circ}}$$

(ii) z pravoúhlého trojúhelníka ABC určíme nejprve úhel φ: $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{|BC|}{|AC|} =$

$$= \operatorname{arctg}\frac{2{,}1}{2{,}5} = 40{,}03^\circ$$

Pak Θ = úhel v záporném smyslu $= -90^\circ - \varphi = -90^\circ - 40{,}03^\circ = \underline{\underline{-130{,}03^\circ}}$

Možná si někdy byly čtenář všiml toho, že vektor $\vec{v}$ je nakreslen nějak příliš velký vzhledem k osám x, y ... ale to je v pořádku, vektor $\vec{v}$ má totiž jiné jednotky ($m \cdot s^{-1}$) než osy x, y (m), takže si pro grafické znázornění jednotky rychlosti můžeme volit jinou délku.

Známe směr vektoru $\vec{v}(15)$ ... $\Theta = \underline{\underline{-130{,}03^\circ}}$ = (pro procvičení) = $-2{,}27$ rad

Velikost vektoru $\vec{v}(15)$ určíme lehce pomocí jeho souřadnic:

$$|\vec{v}(15)| = \sqrt{2{,}1^2 + 2{,}5^2} = \underline{\underline{3{,}26\ ms^{-1}}}$$

Králík se tedy v okamžiku $t=15$ pohybuje rychlostí $3{,}26\ ms^{-1}$ ve směru úhlu $\Theta = -130{,}03^\circ$.

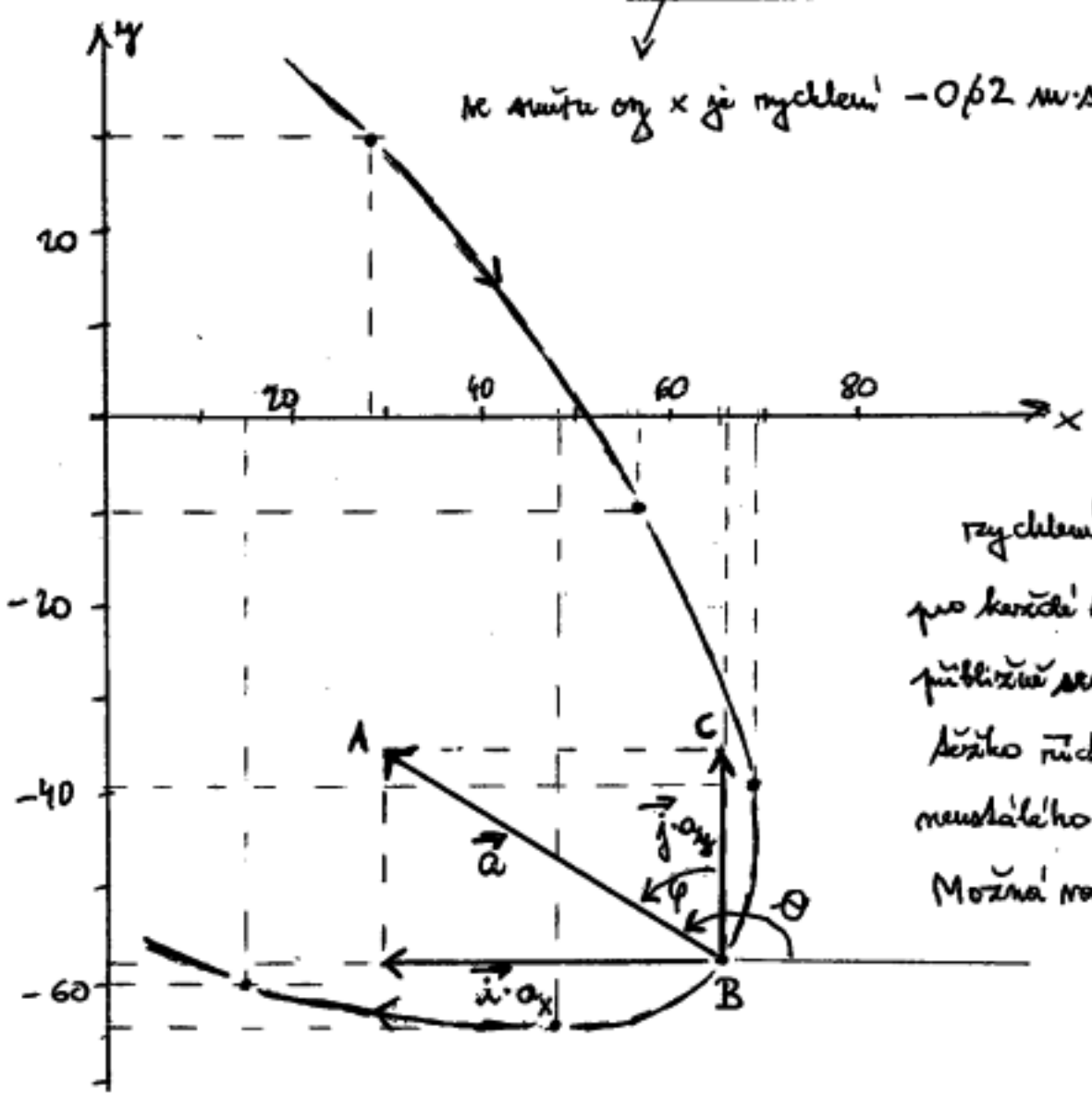
ad b) Podle vztahu (4.10) pro vektor zrychlení $\vec{a}(t)$ platí:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \left(\frac{d}{dt}(-0{,}62t + 7{,}2)\,;\ \frac{d}{dt}(0{,}44t - 9{,}1)\right) =$$

$$= \underline{\underline{(-0{,}62\,;\ 0{,}44)}}$$

ve směru osy y je zrychlení $0{,}44\ ms^{-2}$

ve směru osy x je zrychlení $-0{,}62\ ms^{-2}$



rychlení $\vec{a}(t)$ je stále stejné pro každé t a směřuje stále přibližně severozápadním směrem; těžko říct, co bylo příčinou neustálého „zrychlování" pohybu. Možná vál silný jihovýchodní vítr.

určení směru Θ vektoru $\vec{a}$:

(i) posuneme-li vektor $\vec{a}$ do počátku, ukazuje do 2. kvadrantu, tj. (podle str. 82)

$$\Theta = \operatorname{arctg}\frac{a_y}{a_x} + 180^\circ = \operatorname{arctg}\frac{0{,}44}{-0{,}62} + 180^\circ \doteq -35{,}36^\circ + 180^\circ = \underline{\underline{144{,}64^\circ}}$$

(ii) pokud nemáme k dispozici vzorec ze str. 82, musíme začít používat hlavu:

z pravoúhlého $\triangle ABC$ určíme nejprve úhel φ: $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{|AC|}{|BC|} = \operatorname{arctg}\frac{0{,}62}{0{,}44} = 54{,}64^\circ$

Pak $\Theta = 90^\circ + \varphi = \underline{\underline{144{,}64^\circ}}$

Velikost vektoru $|\vec{a}|$ určíme snadno pomocí souřadnic: $|\vec{a}| = \sqrt{0{,}62^2 + 0{,}44^2} = \underline{\underline{0{,}76}}\ ms^{-2}$

Kuželík má při svém pohybu konstantní zrychlení $0{,}76\ ms^{-2}$ ve směru $\Theta = 144{,}64^\circ$.]

<u>Kontrola 3.</u> Následující vztahy popisují možnosti pohybu hokejového kotouče po ledové ploše ležící v souřadnicové rovině xy (poloha je zadána v metrech):

a) $x = -3t^2 + 4t - 2$, $y = 6t^2 - 4t$

b) $x = -3t^2 - 4t$, $y = -5t^2 + 6$

c) $\vec{r} = 2t^2 \cdot \vec{i} - (4t+3) \cdot \vec{j}$

d) $\vec{r} = (4t^3 - 2t) \cdot \vec{i} + 3\vec{j}$

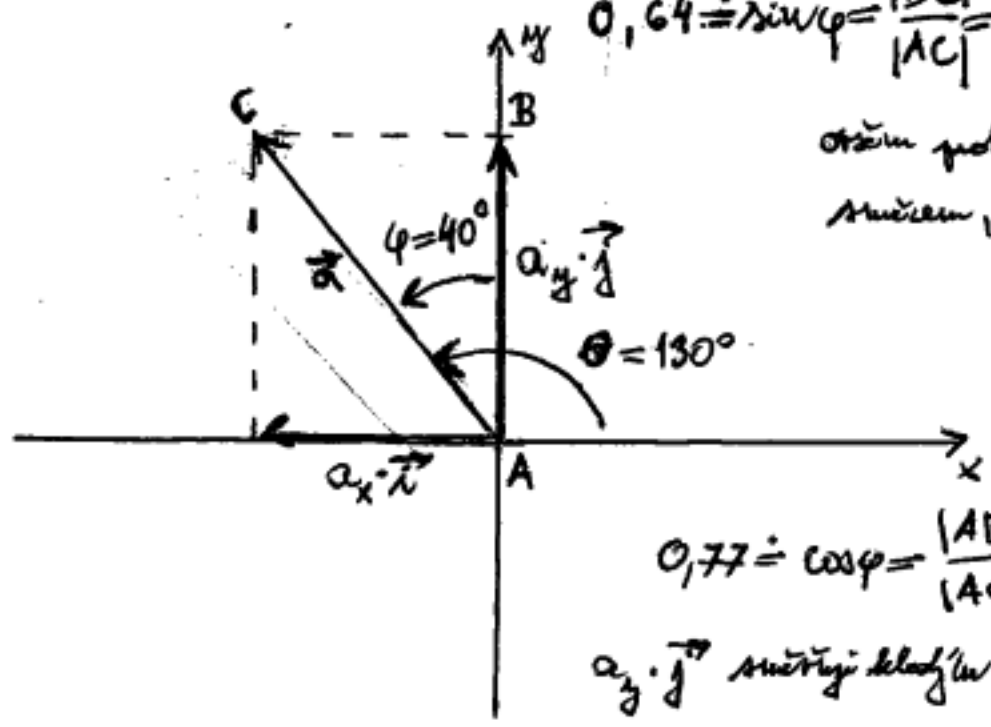
V jednotlivých případech rozhodněte, zda je některá ze složek zrychlení $\vec{a}$ konstantní, nebo zda je konstantní celý vektor $\vec{a}$.

<u>Př. 23.</u> Částice se pohybuje v souřadnicové rovině s konstantním zrychlením $\vec{a} = (a_x, a_y)$, kde $|\vec{a}| = 3\ m \cdot s^{-2}$ a vektor $\vec{a}$ svírá s kladným směrem osy x úhel $\Theta = 130^\circ$. V okamžiku $t_0 = 0$ se částice pohybuje rychlostí $\vec{v}_0 = (-2; 4)$ v metrech za sekundu. Určete její rychlost $\vec{v}(t)$ pro $t = 2\ s$

a) a vyjádřete pomocí souřadnic

b) a vyjádřete pomocí velikosti a směru

[řešení: určíme nejprve souřadnice vektoru $\vec{a}$:



$0{,}64 \doteq \sin\varphi = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a_x}{3} \Rightarrow |a_x| = 3 \cdot 0{,}64 = 1{,}92$

ovšem protože $a_x \cdot \vec{i}$ ukazuje záporným směrem, musí $\underline{\underline{a_x = -1{,}92}}$

$0{,}77 \doteq \cos\varphi = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|a_y|}{3} \Rightarrow |a_y| = 3 \cdot 0{,}77 = 2{,}31$

$a_y \cdot \vec{j}$ směřuje kladným směrem, tj. $\underline{\underline{a_y = 2{,}31}}$

celkem $\vec{a} = (-1{,}92; 2{,}31)$

ad a) V kapitole 2 jsme podobné příklady řešili pro pohyb po přímce – zde máme sice pohyb obecně v rovině, ale ten můžeme rozložit na pohyb ve směru osy x a pohyb ve směru osy y:

Vzorec (2.11): $v(t) = v_0 + a \cdot t$ užijeme na každou souřadnici zvlášť:

souřadnice 1:
(pohyb ve směru osy x)

$v_x(t) = v_{0x} + a_x \cdot t$

$v_x(2) = -2 - 1{,}92 \cdot 2 = \underline{\underline{-5{,}84\ \mathrm{ms^{-1}}}}$

souřadnice 2:
(pohyb ve směru osy y)

$v_y(t) = v_{0y} + a_y \cdot t$

$v_y(2) = 4 + 2{,}31 \cdot 2 = \underline{\underline{8{,}62\ \mathrm{ms^{-1}}}}$

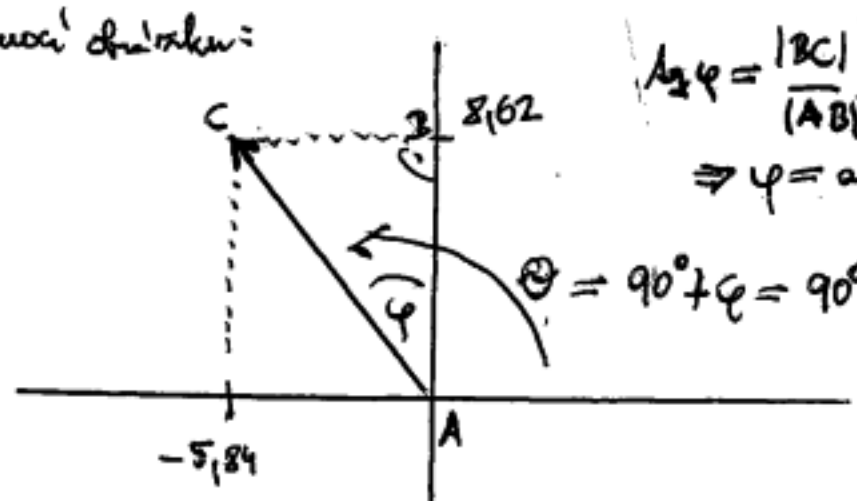
celkem $\vec{v}(2) = \underline{\underline{(-5{,}84\ \mathrm{ms^{-1}};\ 8{,}62\ \mathrm{ms^{-1}})}}$ ... vektor rychlosti ve směrech souřadných os x, y

ad b) Vyjádřit $\vec{v}(2)$ pomocí velikosti a směru je už nyní jednoduché cvičení ... užijeme jednoho ze dvou způsobů:

(i) pomocí vzorce (str. 82): $\vec{v}(2)$ při posunu do počátku směřuje do 2. kvadrantu, tj.

$$\Theta = 180^\circ + \operatorname{arctg} \frac{8{,}62}{-5{,}84} = \underline{\underline{124{,}12^\circ}}$$

(ii) pomocí obrázku:



$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{5{,}84}{8{,}62} \doteq 0{,}68$

$\Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} 0{,}68 = 34{,}12^\circ$

$\Theta = 90^\circ + \varphi = 90^\circ + 34{,}12^\circ = \underline{\underline{124{,}12^\circ}}$

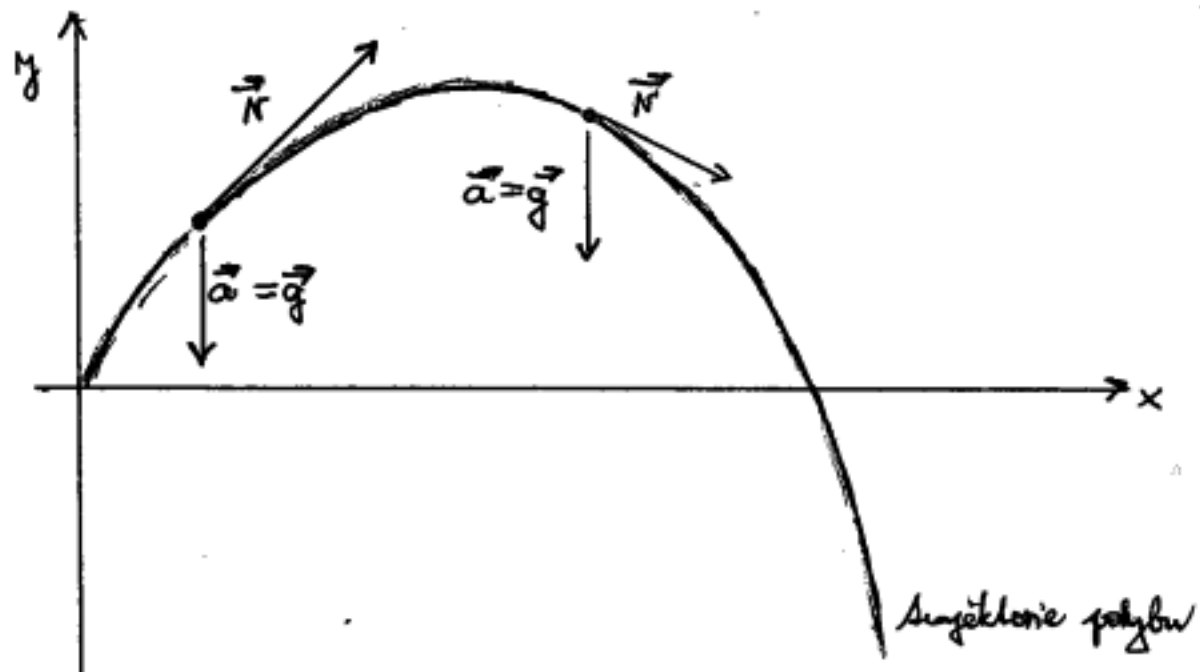
Výpočet velikosti $|\vec{v}(2)|$ je jasný: $|\vec{v}(2)| = \sqrt{5{,}84^2 + 8{,}62^2} \doteq \underline{\underline{10{,}41\ \mathrm{ms^{-1}}}}$

Částice se ve směru úhlu $\Theta = 124{,}12^\circ$ pohybuje rychlostí $10{,}41\ \mathrm{ms^{-1}}$.]

<u>Kontrola 4.</u> Poloha kuličky je zadána vektorem $\vec{r}(t) = (4t^3 - 2t, 3)$. Čas je zadán v sekundách, poloha v metrech. V jakých jednotkách jsou zadány koeficienty 4, −2, 3 ?

4.5. Šikmý vrh

- V oddílu 2.8 jsme se zabývali jednorozměrným pohybem – svislým vrhem. Nyní se budeme věnovat dvourozměrnému pohybu – šikmému vrhu (těleso sice vrháme šikmo vzhůru nebo šikmo dolů v trojrozměrném prostoru, ale pak se pohybuje po křivce ležící v rovině „kolmé na povrch Země", takže souřadné osy x, y můžeme volit tak, aby obě ležely v této rovině).
  - Příkladem šikmého vrhu jsou – let golfového nebo tenisového míče
    – let dětské střely
    atd.
- Při rozboru šikmého vrhu budeme vycházet z následujících předpokladů:
  - zanedbáváme vliv zemské rotace
  - zanedbáváme odpor vzduchu (otázce tření a odporu vzduchu se budeme věnovat až v kapitole 6)
  - změny výšky tělesa nad povrchem Země jsou zanedbatelné vůči jejímu rozměru
- Šikmý vrh má se svislým vrhem jednu věc společnou – v gravitačním poli Země na těleso působí stále stejné tíhové zrychlení $\vec{g}$ (protože budeme pracovat v rovině, $\vec{g}$ můžeme brát jako vektor ukazující „svisle dolů" ... viz obrázek): $\vec{g} = (0\ \mathrm{m\,s^{-2}}, -9{,}80665\ \mathrm{m\,s^{-2}})$



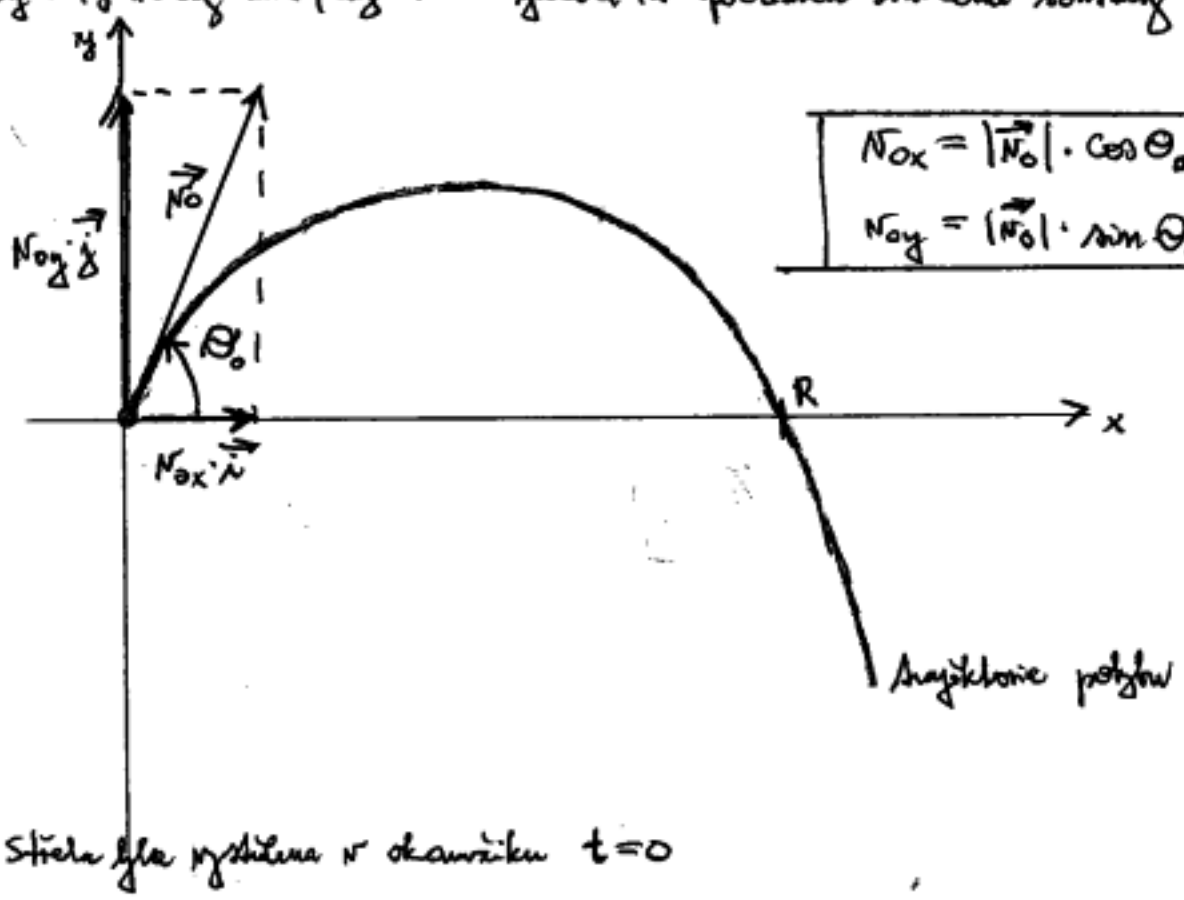
směr i velikost vektoru $\vec{v}$ se stále mění, ale směr i velikost vektoru $\vec{a} = \vec{g}$ je konstantní

- Uvažujme například pohyb kulky vystřelené počáteční rychlostí

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = v_{0x} \cdot \vec{i} + v_{0y} \cdot \vec{j} \qquad (4.13)$$

pod elevačním úhlem θ_0, který svírá vektor $\vec{v}_0$ s kladným směrem osy x :

(osy x, y volíme tak, aby střela vyletěla z počátku souřadné soustavy)



$$\boxed{\begin{aligned} v_{0x} &= |\vec{v}_0|\cdot\cos\theta_0 \\ v_{0y} &= |\vec{v}_0|\cdot\sin\theta_0 \end{aligned}} \qquad (4.14)$$

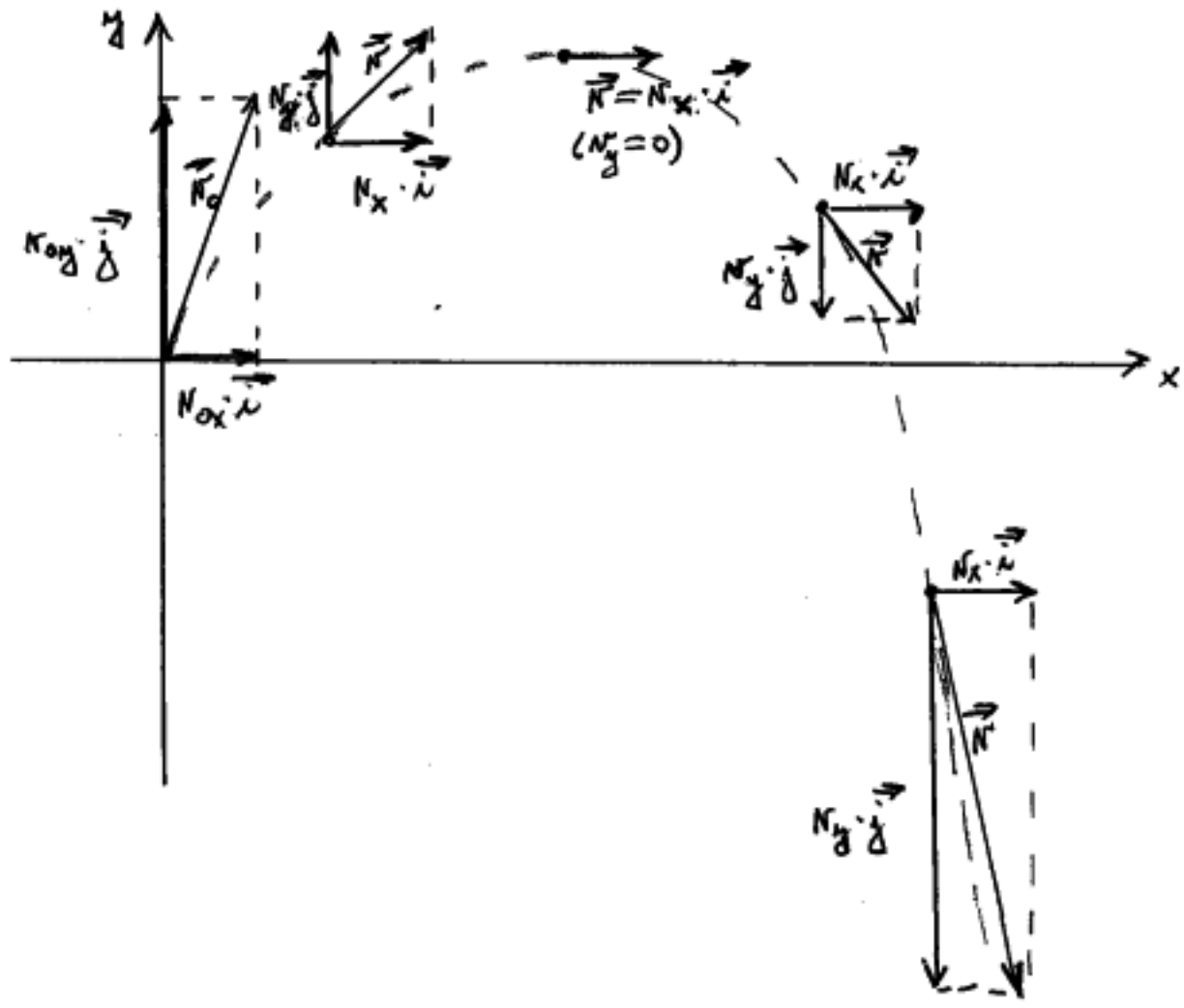
Střela byla vystřelena v okamžiku $t=0$

Dolet R rozumíme vodorovnou vzdálenost od místa výstřelu měřenou v okamžiku, kdy střela projde místem v téže výšce nad povrchem země jako bylo místo startu.

- při matematickém popisu pohybu střely můžeme rozklad vektoru $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$ do souřadnic : Pohyb střely popíšeme tak, že zvlášť popíšeme

  a) pohyb ve směru osy x pomocí – souřadnice x
  – rychlosti $v_x(t)$ ve směru osy x

  b) pohyb ve směru osy y pomocí – souřadnice y
  – rychlosti $v_y(t)$ ve směru osy y

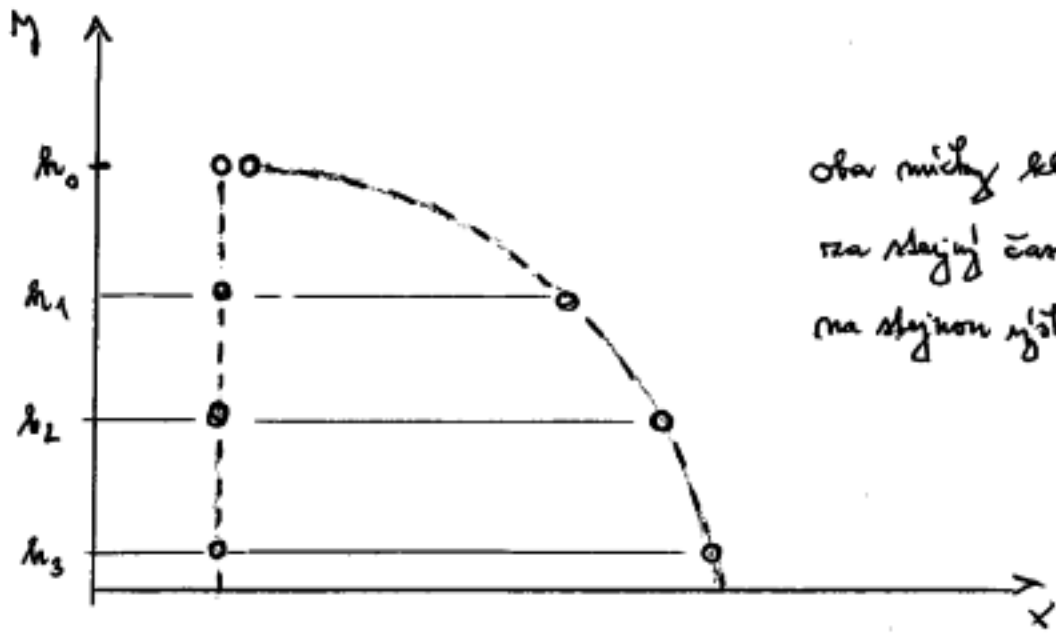


Vodorovné složky $v_x \cdot \vec{i}$ jsou nezávislé na svislých složkách $v_y \cdot \vec{j}$,

pohyb částice v rovině můžeme tedy získat složením dvou pohybů přímočarých – vodorovného a svislého.

Nezávislost vodorovné složky rychlosti $\vec{v}$ na její svislé složce lze ověřit třemi pokusy (experimenty):

a) Pokud současně v okamžiku $t=0$ jeden míček volně pustíme dolů a druhý míček vystřelíme vodorovným směrem, tak „jejich svislý pohyb je stejný" (ve stejných časových intervalech urazí oba míčky stejnou svislou vzdálenost):

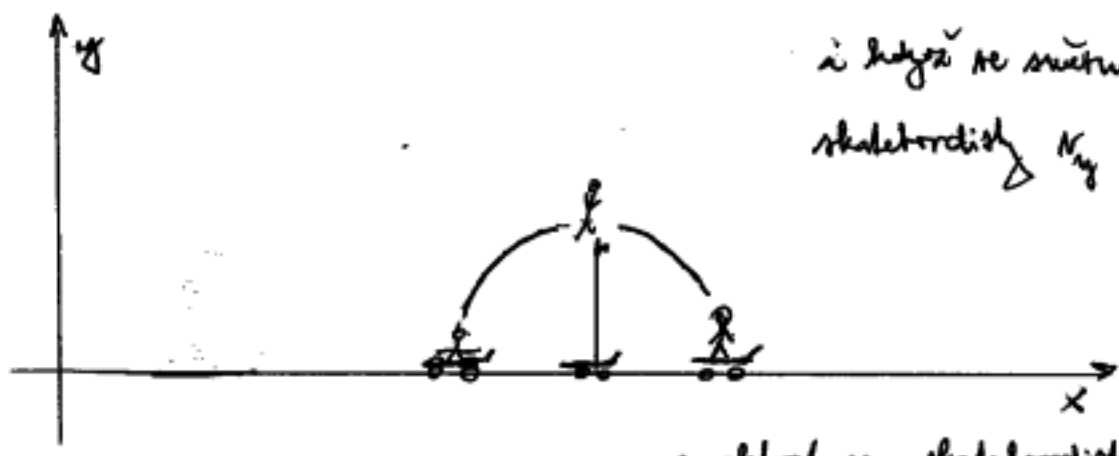


oba míčky klesnou z výšky h za stejný časový interval na stejnou výšku, např. h_2

Tedy skutečnost, že jeden z míčků se současně pohybuje ještě ve vodorovném směru, nijak neovlivní průběh jeho pohybu do svislého směru

(odpor vzduchu jsme zanedbali)

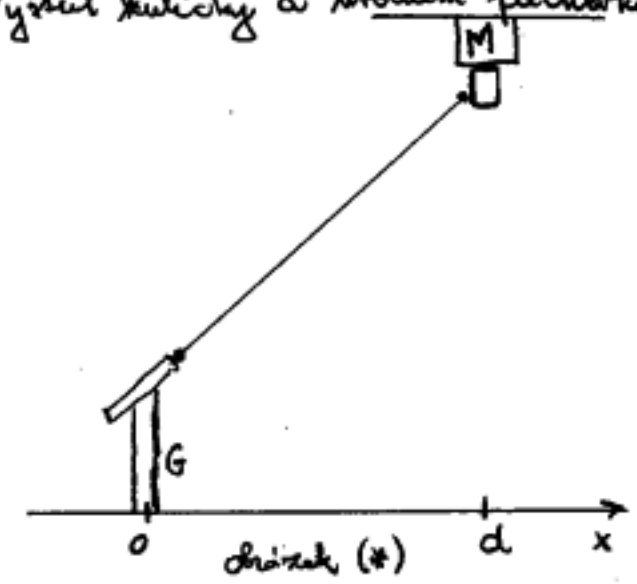
b) Skateboardista jede na skateboardu konstantní rychlostí, odrazí se, až překoná lavičku v jisté výšce, a doskočí opět na skateboard



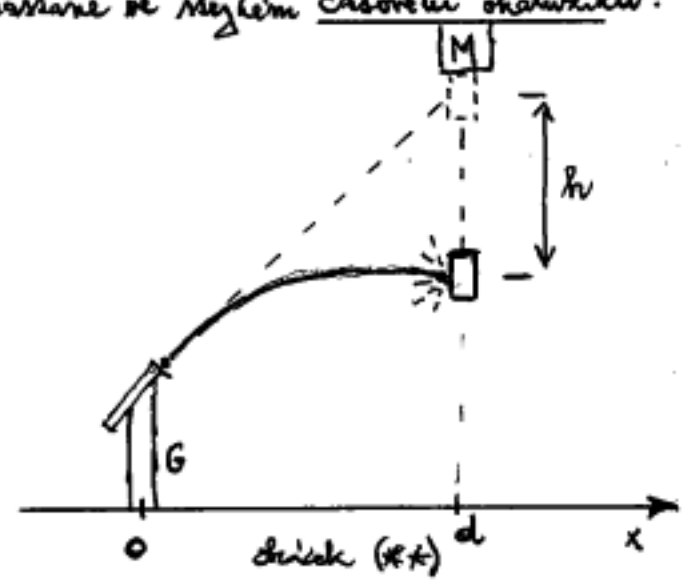
i když se směru osy y se rychlost skateboardisty v_y mění, na vodorovný pohyb do velké míry:

rychlost v_x skateboardisty ve vodorovném směru je stejná jako rychlost skateboardu, takže sportovec na skateboard při dopadu opět doskočí

c) Z fonkačky G s malými kuličkami jako střelivem střílíme na plechovku zavěšenou na magnetu M. Trubice fonkačky je namířená přímo na plechovku.
Výstřel kuličky a uvolnění plechovky nastane se stejným časovým okamžikem.



obrázek (*)



obrázek (**)

ad (*): pokud bychom prováděli pokus ve stavu beztíže ($\vec{g}=(0,0)$), tak poté, co magnet uvolní své magnetické síly a pustí plechovku, by zůstala plechovka bez pohybu visět a kulička fonkmutá jakoukoli kladnou rychlostí by do ní narazila (v_x i v_y je neustále konstantní).

ad (**): pro tíhové $\vec{g}=(0;-9{,}80665)$ v gravitačním poli Země při současném fonkmutí kuličky a uvolnění plechovky taková kulička plechovku zasáhne!
(vtip je v tom, že tíhové zrychlení $\vec{g}$ ovlivňuje jak kuličku, tak plechovku, tj. kulička i plechovka v okamžiku srážky (pokleslou o stejnou výšku h vzhledem k situaci (*))
Zajímavé je, že kulička plechovku zasáhne při jakékoli počáteční rychlosti fonkmutí kuličky! Při vyšší rychlosti totiž sice kulička „vyletí výš", ale padá se jí to za kratší dobu, tj. velikost h poklesu plechovky je menší.

4.6. Šikmý vrh – matematický popis

Díky nezávislosti vodorovné složky pohybu na svislé složce lze popsat každou z těchto složek pohybu zvlášť.

a) vodorovná složka pohybu: protože ve vodorovném směru je zrychlení nulové, jedná se o rovnoměrný pohyb po přímce, tj. platí

$$v_x(t) = v_{0x} \quad \text{(rychlost je stále rovna počáteční rychlosti)}$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}\cdot t \quad (\Leftarrow \text{vztah 2.15 po dosazení } a=0)$$

Po vyjádření v_{0x} pomocí elevačního úhlu θ_0 (ten nás bude v příkladech zajímat) podle (4.14) dostáváme

$$\boxed{x(t) = x_0 + t \cdot |\vec{v}_0| \cdot \cos\theta_0} \qquad (4.15)$$

b) svislá složka pohybu:

Průmětem pohybu částice do svislého směru je vlastně svislý vrh, pro který platí rovnice (2.11)' a (2.15)'.

Přepisem (2.11)' $v_y(t) = v_{0y} - g \cdot t$

pomocí (4.14) dostaneme

$$\boxed{v_y(t) = |\vec{v}_0| \cdot \sin\theta_0 - g \cdot t} \qquad (4.16)$$

a případně (2.15)' (místo x používáme označení proměnné y: $y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$)

podle (4.14) máme

$$\boxed{y(t) = y_0 + t \cdot |\vec{v}_0| \cdot \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g t^2} \qquad (4.17)$$

c) několik poznámek:

1) rovnice trajektorie: rovnice (4.15), (4.17) představují tzv. parametrické rovnice trajektorie (= rovnice polohy částice $[x(t), y(t)]$ v okamžiku t).

Pokud z těchto rovnic vyloučíme parametr t – např. vyjádřením t ze (4.15) a dosazením do (4.17) – dostaneme rovnici trajektorie ve tvaru $y = f(x)$ ... souřadnice y je funkcí souřadnice x:

ze (4.15): $$t = \frac{x(t) - x_0}{|\vec{v}_0| \cdot \cos\theta_0}$$

dosadíme do (4.17): $$y(t) = y_0 + \frac{x(t) - x_0}{\cancel{|\vec{v}_0|} \cdot \cos\theta_0} \cdot \cancel{|\vec{v}_0|} \cdot \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g \cdot \frac{(x(t) - x_0)^2}{|\vec{v}_0|^2 \cdot \cos^2\theta_0}$$

Volbou takové soustavy souřadnic, aby $x_0 = 0$, dostaneme rovnici

$$y(t) = \underbrace{y_0}_{a} + \underbrace{\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0}}_{b} \cdot x(t) - \underbrace{\frac{g}{2|\vec{v}_0|^2 \cdot \cos^2\theta_0}}_{c} \cdot x^2(t)$$

Označením konstantních členů v poslední rovnici dostaneme rovnici

$$\boxed{y = a + b \cdot x + c \cdot x^2} \qquad (4.19)$$

To je tzv. kvadratická funkce – jejím grafem je parabola

Tj. trajektorií pohybu při šikmém vrhu je parabola.

$y = a + bx$ ... tzv. lineární funkce, jejím grafem je přímka (tu už umíme nakreslit).

$y = a + bx + cx^2$ ... kvadratická funkce, jejím grafem je parabola (c ≠ 0 ... to by se jednalo o přímku)

naučíme se nyní parabolu nakreslit:

Nakreslíme grafy parabol

a) $y = x^2$

b) $y = 2x^2$, $y = \frac{x^2}{3}$, $y = -\frac{x^2}{4}$

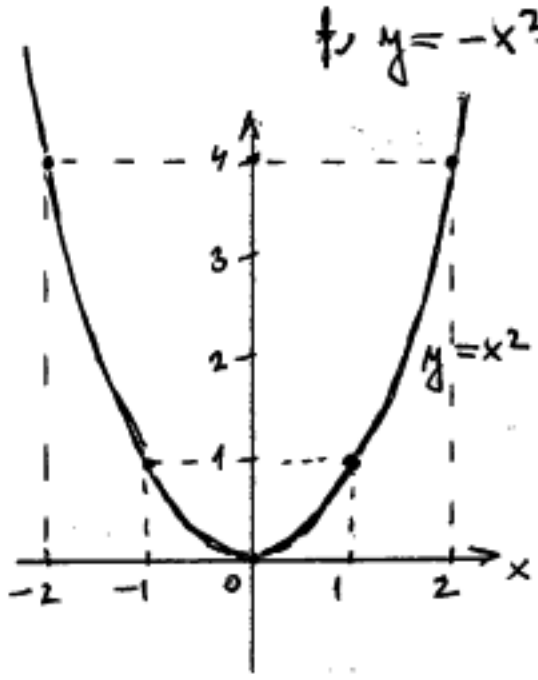
c) $y = \frac{3}{4}(x+1)^2$

d) $y = \frac{3}{4}(x+1)^2 - 3$

e) $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$

f) $y = -x^2 - 6x - 8$

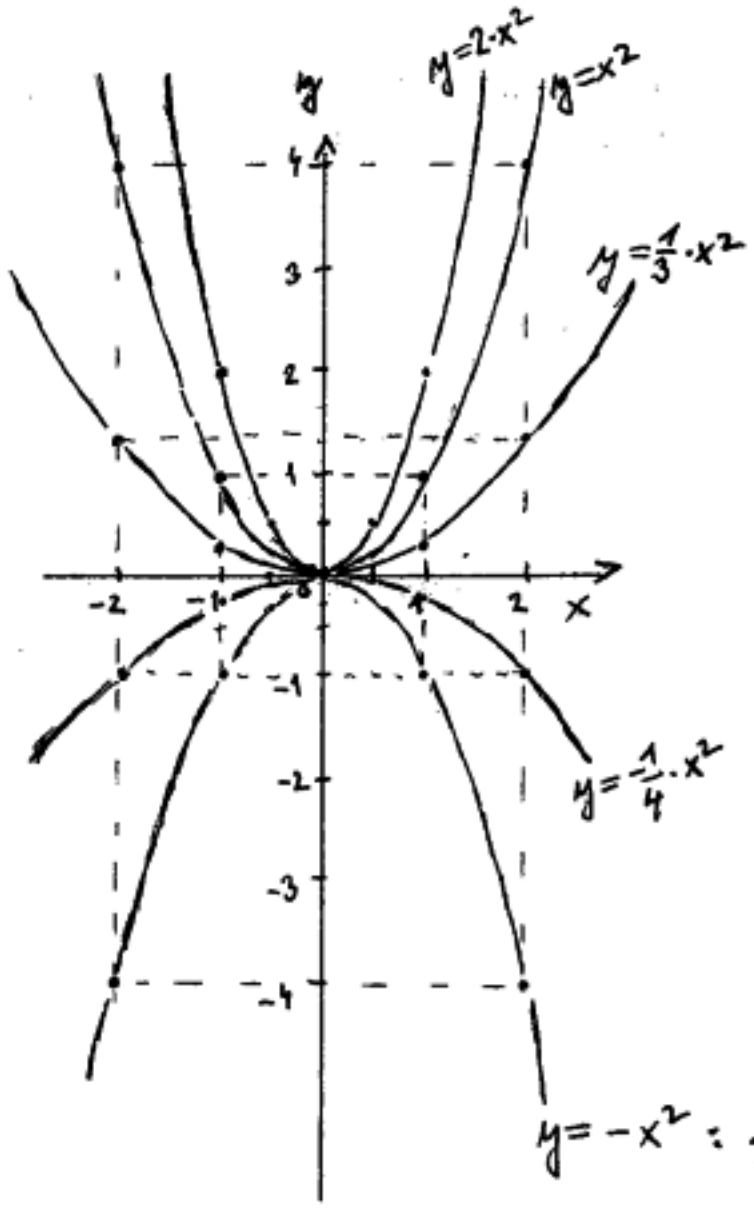
ad a)



Výpočtem funkčních hodnot v bodech 0, 1, 2, −1, −2 vyznačíme některé hodnoty přesně, a pak jimi křivku grafu přibližně proložíme.

Graf je symetrický vzhledem ke svislé ose (tj. $y=x^2$ je sudá funkce)

ad b)



$y = 2x^2$: $y(1) = 2\cdot 1^2 = 2$

$y(\frac{1}{2}) = 2\cdot(\frac{1}{2})^2 = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$y(2) = 2\cdot 2^2 = 2\cdot 4 = 8$

(graf je užší v porovnání s grafem $y=x^2$)

$y = \frac{1}{3}\cdot x^2$: $y(1) = \frac{1}{3}\cdot 1^2 = \frac{1}{3}$

$y(2) = \frac{1}{3}\cdot 2^2 = \frac{4}{3}$

(graf je širší v porovnání s grafem $y=x^2$)

$y = -\frac{1}{4}\cdot x^2$: záporný koeficient $-\frac{1}{4}$ naznačuje, že parabola bude otočená směrem dolů

$y(1) = -\frac{1}{4}\cdot 1^2 = -\frac{1}{4}$

$y(2) = -\frac{1}{4}\cdot 2^2 = -\frac{1}{4}\cdot 4 = -1$

(graf je širší v porovnání s grafem $y=-x^2$)

$y = -x^2$: graf je symetrický podle osy x s grafem funkce $y=x^2$

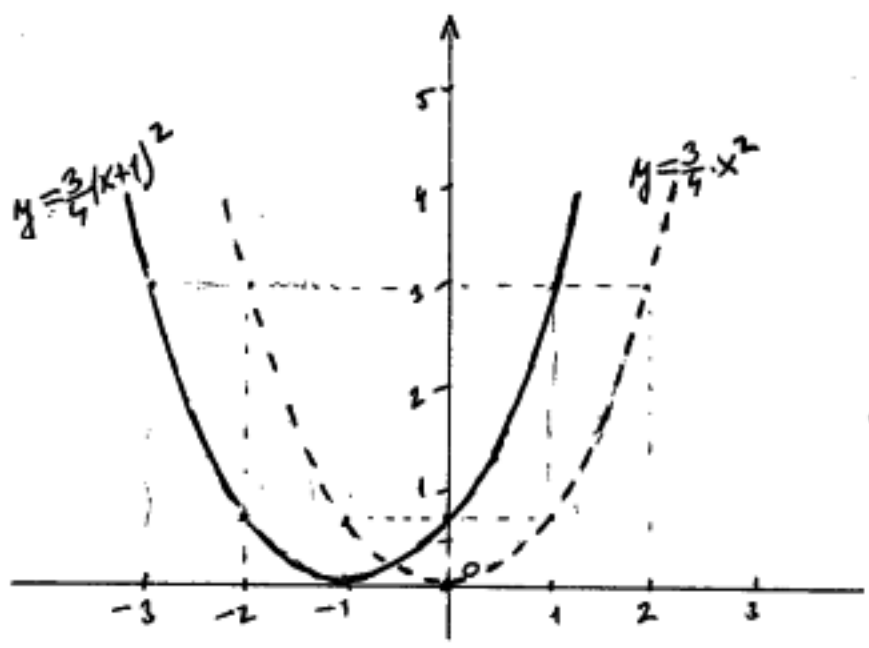
$y(1) = -1^2 = -1$ $\quad$ $y(-1) = -(-1)^2 = -1$

$y(2) = -2^2 = -4$ $\quad$ $y(-2) = -(-2)^2 = -4$

Z obrázku je vidět, že pro graf funkce $y = c \cdot x^2$ $(c \neq 0)$ platí:

- $c > 0$ ... parabola otočená nahoru, $c < 0$ ... parabola otočená dolů
- $|c| < 1$ ... graf sevřenější než grafy $y = x^2$, $y = -x^2$
  $|c| > 1$ ... graf otevřenější než grafy $y = x^2$, $y = -x^2$

ad c)



začneme u grafu $y = \frac{3}{4}x^2$, který už umíme nakreslit

$y(1) = \frac{3}{4} \cdot 1^2 = \frac{3}{4}$

$y(2) = \frac{3}{4} \cdot 2^2 = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$

graf funkce $y = \frac{3}{4}(x+1)^2$ bude pouze posunutý. Nejlepší je zjistit, jak se posune vrchol paraboly $[0;0]$:

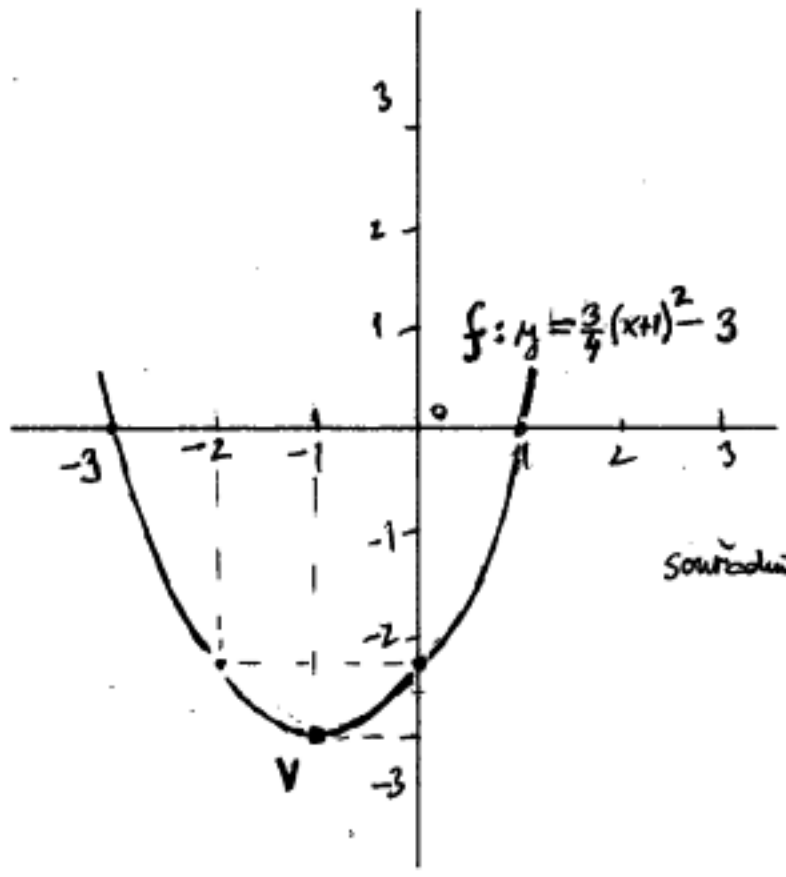
Zjistíme, ve kterém bodě platí $0 = \frac{3}{4}(x+1)^2$:

$0 = x+1$

$-1 = x$ ... vrchol se posune do bodu $[-1; 0]$

V dalších příkladech najdeme jen polohu vrcholu konečné paraboly (a míru otevřenosti paraboly odhadneme).

ad d) $y = \frac{3}{4}(x+1)^2 - 3$ ... vyjdeme od paraboly $y = \frac{3}{4}(x+1)^2$ a všechny funkční hodnoty posuneme o (-3) dolů vzhledem k ose y:



$D_f = \mathbb{R}$

$H_f = \langle -3; \infty)$

souřadnice vrcholu paraboly: $V = [-1; -3]$

ad e) $y=\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$ ... v tomto obecném tvaru bývá většinou parabola zadána

budeme ji následujícím způsobem upravovat:

$$y=\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}(x^2+2x-3)=$$

① vytkneme koeficient u x^2

② výraz v závorce doplníme na tzv. úplný čtverec přičtením a odečtením stejné konstanty, abychom mohli využít vzorce

$$\boxed{\begin{aligned} u^2+2\cdot u\cdot v+v^2&=(u+v)^2 \quad (4.18\oplus)\\ u^2-2\cdot u\cdot v+v^2&=(u-v)^2 \quad (4.18\ominus)\end{aligned}}$$

$$=\frac{3}{4}\Big(\underbrace{\overset{u^2+2\cdot u\cdot v+v^2}{x^2+2\cdot x\cdot 1+1}}_{\text{zde vznikl tzv. úplný čtverec}}\underbrace{-1}-3\Big)=\frac{3}{4}\left[(x+1)^2-4\right]=\underline{\underline{\frac{3}{4}(x+1)^2-3}}$$

③ úplný čtverec upravíme podle (4.18)

④ roznásobíme zpátky koeficientem, který jsme vytkli jen proto, aby byly úpravy ②, ③ jednodušší

Dopěli jsme do tvaru, ze kterého lze rozeznat posunutí vrcholu V, tj. parabolu lze lehce nakreslit.

A hele, ono je to stejný tvar jako d) !! Takže stejný obrázek už kreslit nebudeme.

ad f) $y=-x^2-6x-8$ ... prostřednictvím úpravy na ten tvar, ze kterého lze vidět souřadnice vrcholu V:

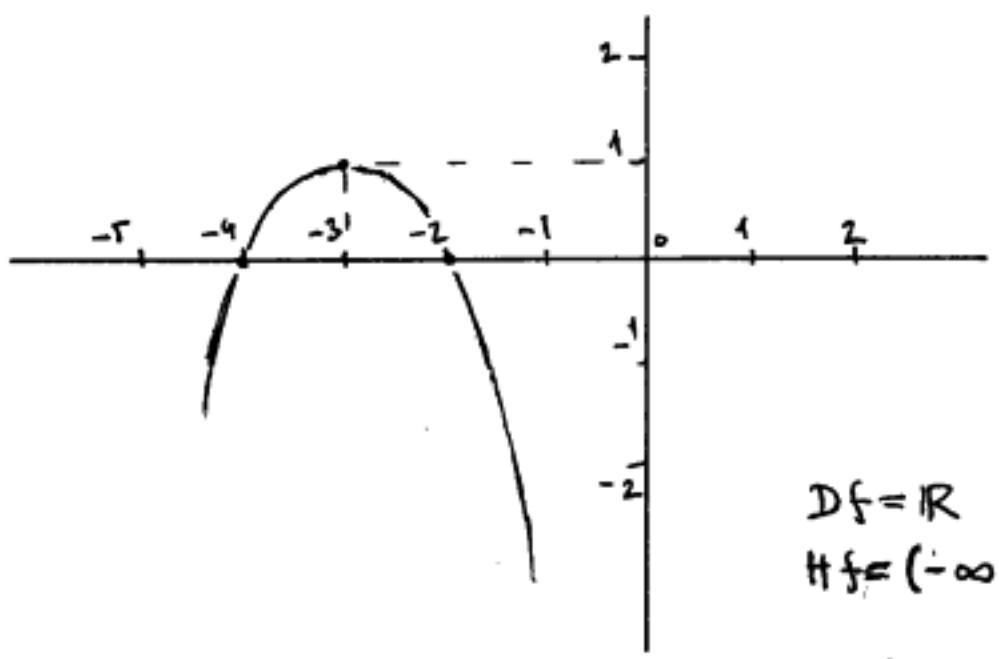
$$y=-x^2-6x-8\underset{\text{krok ①}}{=}-(x^2+6x+8)\underset{\text{krok ②}}{=}-\Big(\underbrace{\overset{u^2+2\cdot u\cdot v+v^2}{x^2+2\cdot x\cdot 3+9}}_{=(x+3)^2}\underbrace{-9}_{=-1}+8\Big)\overset{③}{=}-\left[(x+3)^2-1\right]\overset{④}{=}$$

$$=\underline{\underline{-(x+3)^2+1}}$$

$V=[-3;1]$

parabola je otočená dolů

koeficient $=-1$ ... sevření je stejné jako u funkce $y=-x^2$



$D_f=\mathbb{R}$

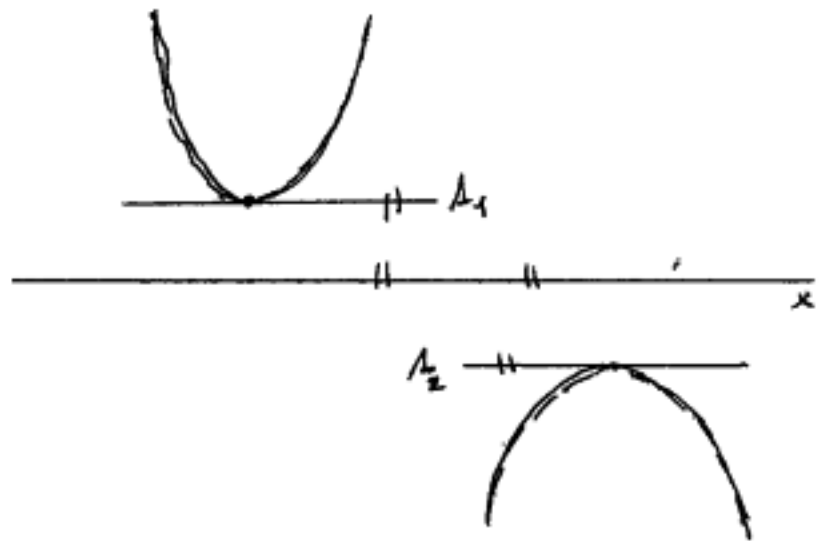
$H_f=(-\infty,1\rangle$

Při kreslení paraboly tedy
- podle koeficientu u x^2 poznáme směr větví paraboly a otočení nahoru nebo dolů
- najdeme její vrchol $V=[K_1,K_2]$ doplněním na úplný čtverec
- nakreslíme graf, případně určíme D_f, H_f

($D_f=\mathbb{R}$ vždy, $H_f=(-\infty,K_2\rangle$ při otočení paraboly dolů nebo $\langle K_2,\infty)$ při otočení paraboly nahoru)

Určit souřadnice vrcholu paraboly lze i jiným způsobem, a sice užitím derivace:

Tečna k vrcholu paraboly je rovnoběžná s osou x (tj. její směrnice je rovna 0):



Pro x-ovou souřadnici vrcholu tedy platí, že $f'(x)=0$

Například pro $f(x)=-x^2-6x-8$

$f'(x)=-2x-6$ (podle vzorce D1 na str. 11)

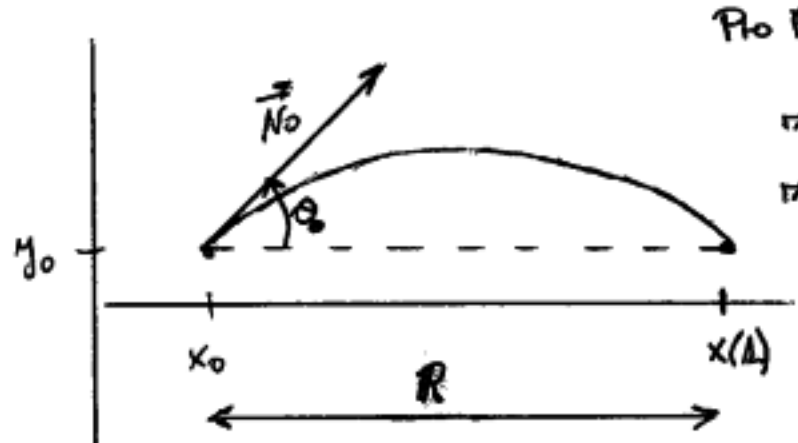
Pak řešíme $-2x-6=0$

$x=-3 \Rightarrow$ y-ovou souřadnici vypočteme dosazením do $f(x)$:

$y=f(-3)=-(-3)^2-6(-3)-8=1$

tj. $\underline{\underline{V=[-3;1]}}$

2) <u>Dolet</u>: Doletem R (možná z anglického reach = dosah) rozumíme vzdálenost ve vodorovném směru, po jejímž uplynutí se střela vrátí do stejné svislé výšky, ze které byla vystřelena.



Pro R platí:

z (4.15): $\underline{R}=x(t)-x_0=\underline{t\cdot|\vec{v_0}|\cdot\cos\theta_0}$

z (4.17): $y(t)=y_0$, tj.

$y(t)-y_0=0=\underline{t\cdot|\vec{v_0}|\cdot\sin\theta_0-\frac{1}{2}gt^2}$

Pokud ze druhé podtržené rovnice vyjádříme t a dosadíme do první,

$$\left.\begin{aligned}\cancel{t}\cdot|\vec{v_0}|\cdot\sin\theta_0&=\frac{1}{2}gt^{\cancel{2}}\\ |\vec{v_0}|\cdot\sin\theta_0&=\frac{1}{2}gt\end{aligned}\right\}\Rightarrow t=\frac{2|\vec{v_0}|\cdot\sin\theta_0}{g}\Rightarrow R=\frac{2|\vec{v_0}|\cdot\sin\theta_0}{g}\cdot|\vec{v_0}|\cdot\cos\theta_0=$$

$$= 2\cdot\frac{|\vec{v}_0|^2\cdot\sin\theta_0\cdot\cos\theta_0}{g}$$

Platí následující vzorce:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha \Rightarrow \text{speciálně } \sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\\ &\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \Rightarrow \text{speciálně } \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\end{aligned}} \quad (4.20.)$$

S využitím prvního z nich máme pro dolet R rovnici

$$\boxed{R=\frac{|\vec{v}_0|^2}{g}\cdot\sin(2\theta_0)} \quad (4.21)$$

Ze (4.21) plyne, že maximální dolet je pro takový úhel θ_0, že

$\sin(2\theta_0)$ je maximální

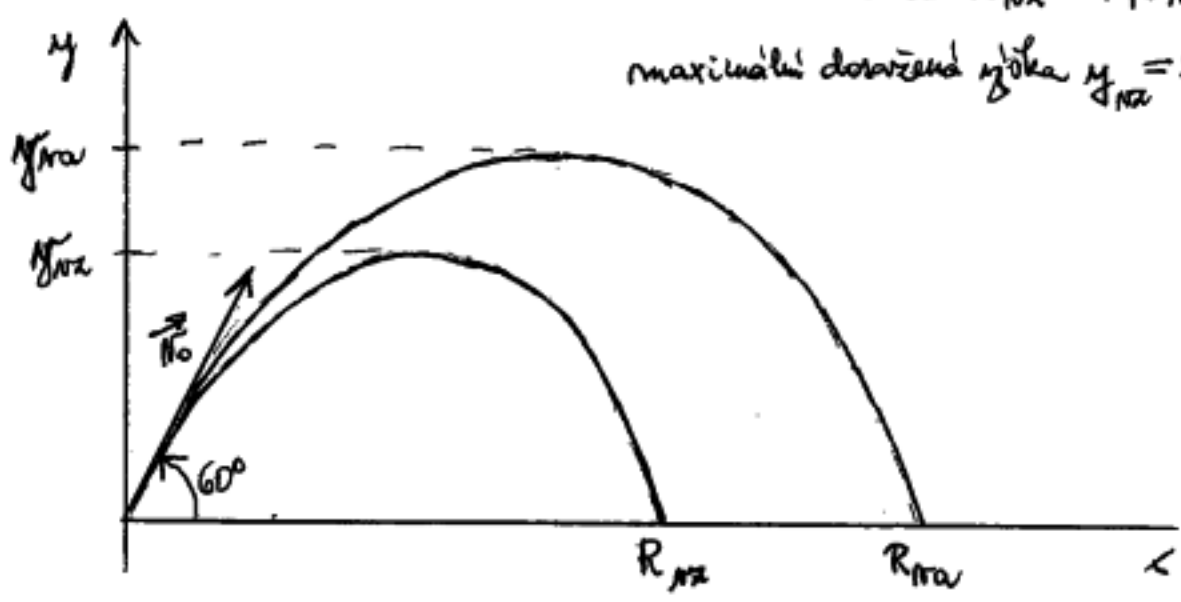
a to nastane pro $2\theta_0=90^\circ \Rightarrow \theta_0=45^\circ$

pro $\theta_0=45^\circ$ má střela nejdelší dolet.

3, <u>Odpor prostředí</u>: Odpor vzduchu lze zanedbat při nízkých rychlostech – při vyšších rychlostech pohybu tělesa je vliv odporu vzduchu význačný. Jako příklad uvažujme tenisový míček odpálený raketou s rychlostí 160 km/h pod elevačním úhlem $\theta_0=60^\circ$. Za běžných vzduchových podmínek

dolet $R_{vz}=98{,}5\,m$

maximální dosažená výška $y_{vz}=53\,m$



Pokud tychou stejnou rychlostí pod stejným úhlem odpálili tenisový míček ve vakuu (= v prostředí, kde je odpor vzduchu nulový), dostali tychou

dolet $R_{va}=177\,m$

maximální dosažená výška $y_{va}=76{,}8\,m$

Čili je vidět, že vliv odporu vzduchu je ve skutečnosti význačný (odpor vzduchu přidáme do svých úvah v kapitole 6).

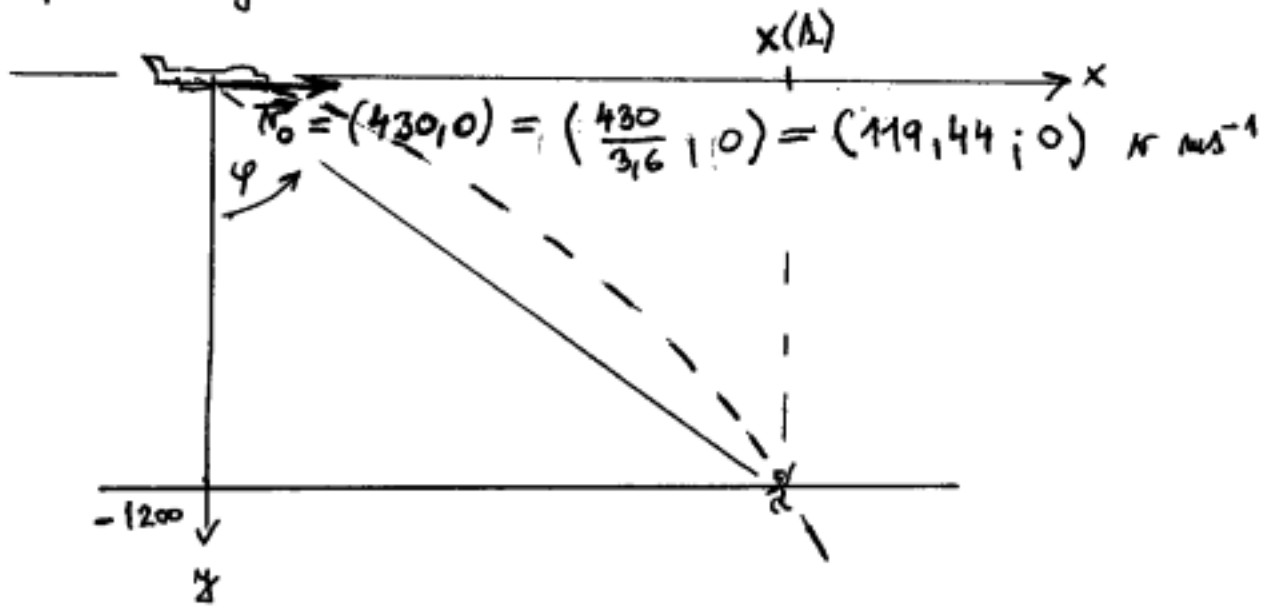
Kontrola 5. Jak se mění a) vodorovná
b) svislá složka rychlosti šikmo vrženého míče?

Uveďte c) vodorovnou
d) svislou složku jeho zrychlení

[odpověď: ad a) v_x je konstantní po celou dobu
ad b) v_y klesá do nuly, pak mění znaménko a roste v záporném směru
ad c) $a_x = 0$ po celou dobu
ad d) $a_y = -g$ po celou dobu]

Pusťme se nyní konečně do konkrétních příkladů na šikmý vrh.

Př. 24. Záchranný letoun letí na pomoc lodoucímu. Pilot udržuje stálou výšku 1200 m nad hladinou a směřuje přímo nad hlavu člověka. Rychlost letadla má velikost 430 km/h. Při jakém zorném úhlu φ musí pilot uvolnit záchranný pytel, aby dopadl co nejblíže lodoucímu?



[Řešení: volíme x – osa pohybu letadla
y – svislá osa při vypuštění pytle $\Big\} \Rightarrow x_0 = 0 = y_0$
$\theta_0 = 0$ ... elevační úhel

známe konečnou svislou polohu $y(t) = -1\,200$ m, odtud lze určit t ze (4.17):
$(v_{0y} = 0)$

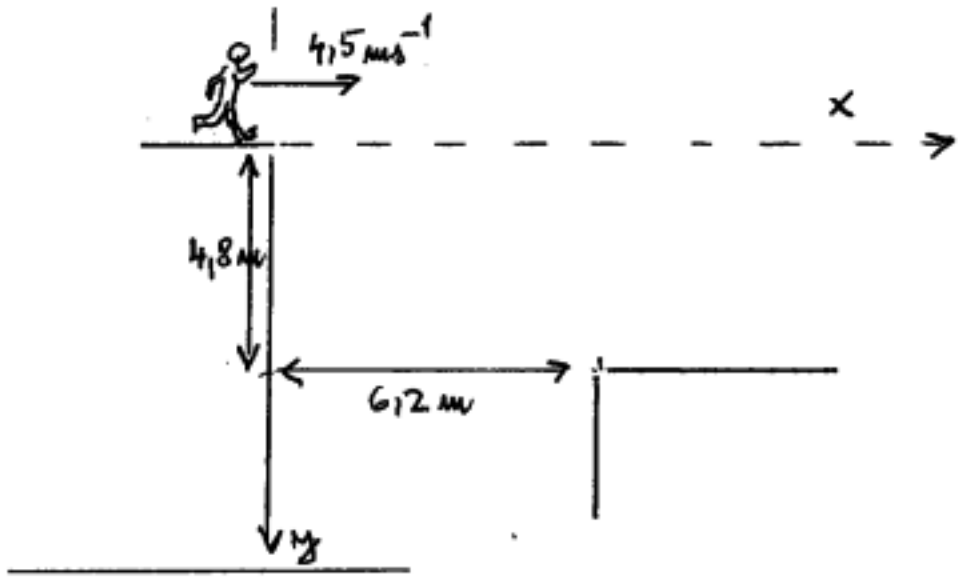
$$0 - 1200 = 0 + 0 - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2$$
$$1200 = 4,905 \cdot t^2$$
$$\sqrt{\frac{1200}{4,905}} = t$$
$$\underline{\underline{15,64\,s = t}}$$

Pokud známe t, lze dopočítat neznámou vzdálenost $x(t)$ ze (4.15):

$$x(15,64) = 0 + 15,64 \cdot 119,44 \cdot 1 = \underline{\underline{1868\,m}}$$

Nyní $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1868}{1200} = 1,557 \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = \operatorname{arctg} 1,557 \doteq 57,3^\circ}}$ a to je odpověď]

Př. 25. Při filmování honičky na ploché střeše má kaskadér přeskočit na střechu sousední budovy (viz obrázek). Ještě předtím jej pronásledovatel napadne, zda nikec může tento úkol zvládnout, běží-li po střeše rovnejší rychlostí $4{,}5\ \mathrm{ms^{-1}}$. Poradíme mu?



[Řešení: počátek souřadné soustavy umístíme opět do bodu odrazu, předpokládáme $\theta_0 = 0$, $\vec{v}_0 = (4{,}5;0)\ \mathrm{ms^{-1}}$.

- známe výšku skoku, čili ze (4.17) lze opět určit t:

$$-4{,}8 = 0 + 0 - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\cdot 4{,}8}{9{,}81}} = \underline{\underline{0{,}979\ \mathrm{s}}}$$

- nyní se podíváme, do jaké vzdálenosti $x(0{,}979)$ doletí kaskadér za tuto dobu (ze (4.15):

$$x(t) = 0 + 4{,}5\cdot 0{,}979\cdot 1 = \underline{\underline{4{,}4\ \mathrm{m}}}$$ ... kaskadér nuzeru nepřeskočí]

(poznámka: kdyby se kaskadérovi podařilo odrazit pod elevačním úhlem $\theta_0 = 30°$, získal by nějaký čas, ale musel by se odrazit větší rychlostí. Jak velkou rychlostí by se musel odrazit, aby doskočil?

Řešení: ze 4.15: $6{,}2 = 0 + |\vec{v}_0|\cdot\cos 30°\cdot t$

ze 4.17: $-4{,}8 = 0 + |\vec{v}_0|\cdot\sin 30°\cdot t - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\cdot t^2$ → vyjádříme např. $|\vec{v}_0|$ ze první rovnice a dosadíme do druhé

$$|\vec{v}_0| = \frac{6{,}2\cdot 2}{\sqrt{3}\cdot t} \Rightarrow -4{,}8 = 0 + \frac{6{,}2\cdot 2}{\sqrt{3}\cdot t}\cdot\frac{1}{2}\cdot t - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\, t^2$$

$$-8{,}38 = -4{,}905\, t^2 = t = \sqrt{\frac{8{,}38}{4{,}905}} = \underline{\underline{1{,}307}} \Rightarrow$$

$$|\vec{v}_0| = \frac{6{,}2\cdot 2}{\sqrt{3}\cdot 1{,}307} = \underline{\underline{5{,}478\ \mathrm{ms^{-1}}}}$$ ... minimální velikost rychlosti pro úhel $\theta_0 = 30°$)

Př. 26. Pirátská loď je zakotvena 560 m od pobřežní pevnosti, která chrání výjezd do ochranného přístavu. Obránci mají k dispozici dělo umístěné v úrovni mořské hladiny, které může vystřelit náboj rychlostí $82\ \mathrm{ms^{-1}}$.

(a) Pod jakým elevačním úhlem musí být nastavena hlaveň, aby náboj lodě zasáhl?

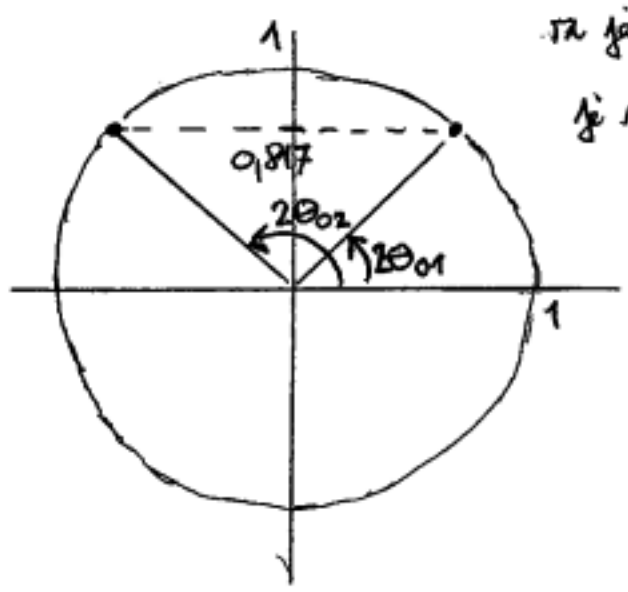
(b) Pro úhel v části (a) vypočtěte dobu letu střely

(c) V jaké vzdálenosti od pevnosti už bude pirátská loď mimo dostřel?

[řešení: ad a) úhel zjistíme z rovnice (4.21) pro dostřel (= dolet):

$$R = \frac{|\vec{v}_0|^2}{g} \cdot \sin(2\theta_0)$$

$$560 = \frac{82^2}{9{,}81} \cdot \sin(2\theta_0) \Rightarrow \underline{\sin(2\theta_0) = 0{,}817} \Rightarrow$$



Z jednotkové kružnice znázorňující význam funkce sinus je vidět, že rovnice má 2 řešení:

1) v prvním kvadrantu

$$2\theta_{01} = \arcsin 0{,}817 = 54{,}787^\circ$$

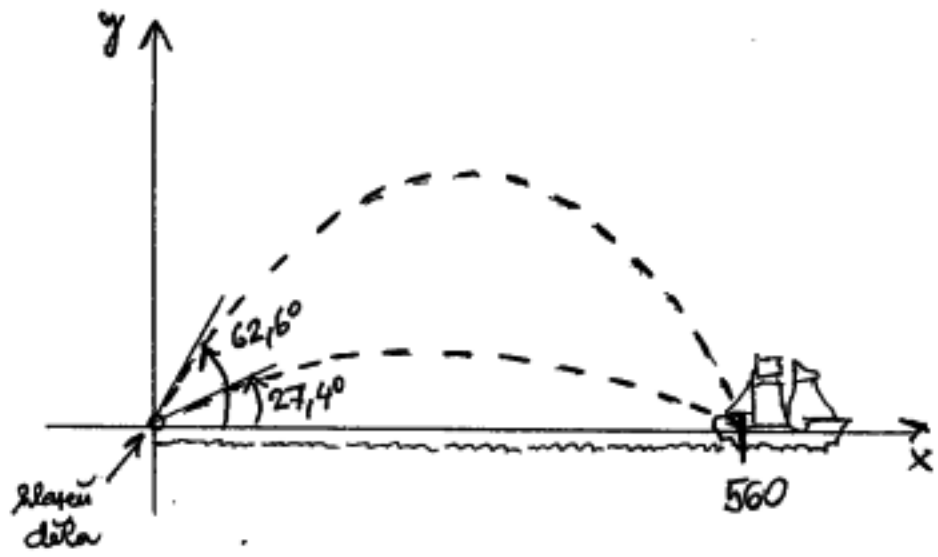
$$\underline{\underline{\theta_{01} \doteq 27{,}4^\circ}}$$

2) ve druhém kvadrantu

$$2\theta_{02} = 180^\circ - 2\theta_{01} = 180^\circ - 54{,}787^\circ = 125{,}213^\circ$$

$$\underline{\underline{\theta_{02} \doteq 62{,}6^\circ}}$$

Úloha má tedy dvě řešení – existují dva možné elevační úhly.



ad b) Doba letu se nejlépe vypočítá z rovnice (4.15) – „vyšší" trajektorie bude mít delší dobu letu:

$$\theta_{01}: \quad 560 = 82 \cdot \cos 27{,}4^\circ \cdot t \Rightarrow t_1 = \frac{560}{82 \cdot 0{,}888} \doteq \underline{\underline{7{,}7\,s}}$$

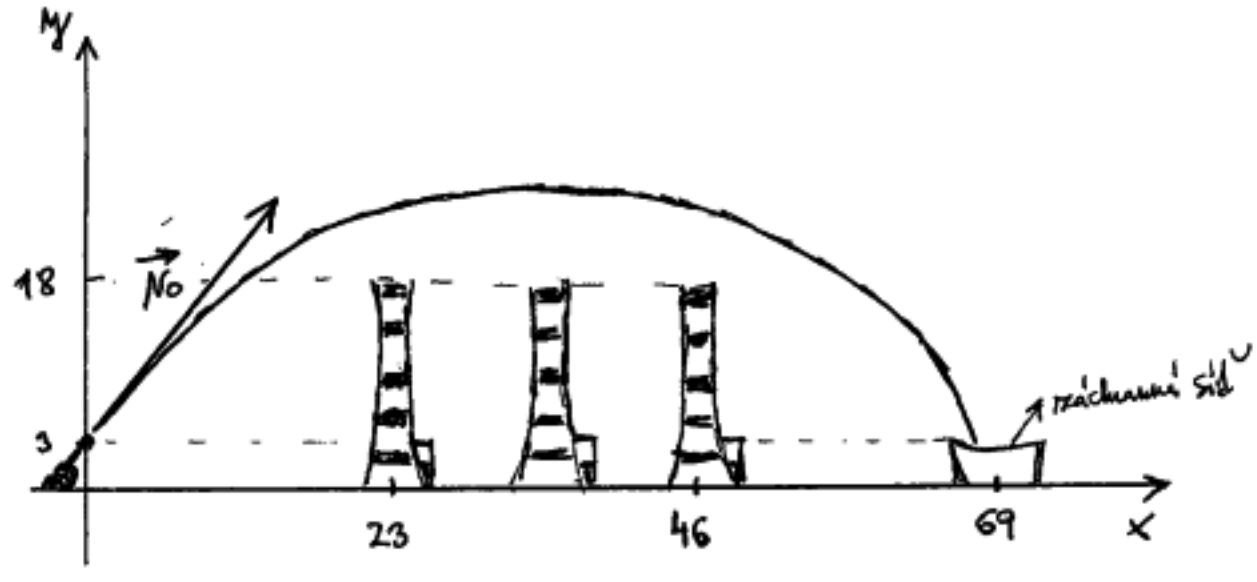
$$\theta_{02}: \quad 560 = 82 \cdot \cos 62{,}6^\circ \cdot t \Rightarrow t_2 = \frac{560}{82 \cdot 0{,}46} \doteq \underline{\underline{14{,}8\,s}}$$

ad c) Víme, že největší dolet je pro úhel $\theta_0 = 45^\circ$:

$$R = \frac{82^2}{9{,}81} \cdot \sin 90^\circ = \frac{82^2}{9{,}81} = \underline{\underline{685{,}4\,m}}$$

(loď bude v bezpečí ve vzdálenosti větší než 685,4 m od pevnosti)

Př. 27 Obrázek znázorňuje historický přelet Emanuela Zacchiniho nad třemi vystřídanými kolty vysokými 18 m. Zacchini byl vystřelen ze speciálního děla rychlostí o velikosti $26{,}5\ \mathrm{ms^{-1}}$ pod elevačním úhlem $\Theta_0 = 53°$. Těsně hlavně i záchranná síť byly ve výšce 3 m nad zemí.



(a) Ověřte si, že artista skutečně přeletěl nad prvním kolem

(b) Předpokládejme, že vrchol trajektorie leží právě nad prostředním kolem. Jak vysoko nad ním artista proletí?

(c) Určete dobu celého letu.

(d) Jak daleko od děla je třeba umístit záchrannou síť?

[Řešení: ad a) Soustava souřadnic je zvolena podle obrázku. Určíme y-ovou souřadnici artisty pro $x = 23$ m: (ze 4.15 určíme t a dosadíme do 4.17)

4.15: $23 = 0 + t \cdot 26{,}5 \cdot \cos 53° \Rightarrow t = 1{,}442$ s

4.17: $y(1{,}442) = 3 + 1{,}442 \cdot 26{,}5 \cdot \sin 53° - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}442^2 = \underline{\underline{23{,}32\ \mathrm{m}}}$ nad zemí

(artista proletí asi 5,32 m nad prvním kolem)

ad b) Ve vrcholu trajektorie platí $v_y(t) = 0$, tj. rovnice 4.16 má tvar

$$0 = 26{,}5 \cdot \sin 53° - 9{,}81 \cdot t \quad \Rightarrow t = \underline{\underline{2{,}16}}\ \mathrm{s}$$

a ze 4.17 určíme $y(2{,}16) = 3 + 2{,}16 \cdot 26{,}5 \cdot \sin 53° - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}16^2 = \underline{\underline{25{,}83\ \mathrm{m}}}$

(artista proletí $25{,}83 - 18 = 7{,}83$ m nad prostředním kolem)

ad c) Dobu celého letu lze určit například ze 4.17, protože $y(t) = y_0 = 3$ m:

$$3 = 3 + 26{,}5 \cdot \sin 53° \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2$$

$$0 = t(4{,}905\,t - 21{,}164) \Rightarrow t = 0 \text{ ... okamžik výstřelu}$$

$$t = \frac{21{,}164}{4{,}905} \doteq \underline{\underline{4{,}3\ \mathrm{s}}}$$

ad d) Například ze 4.15:

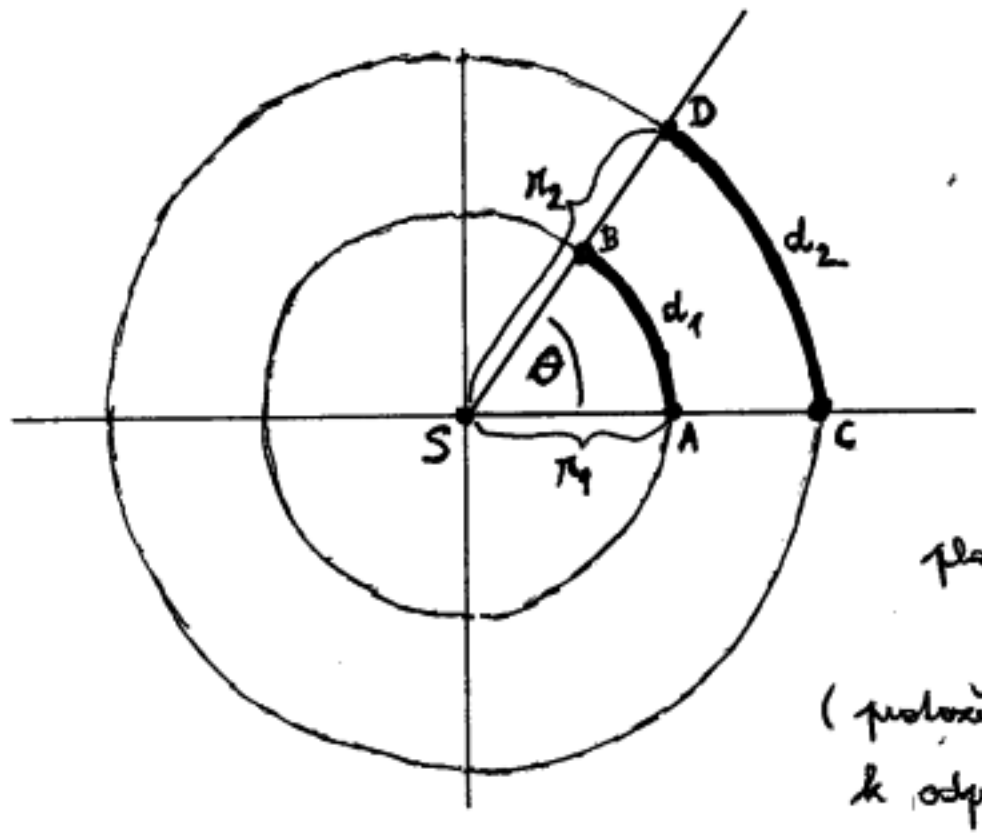
$$x(4{,}3) = 0 + 26{,}5 \cdot \cos 53° \cdot 4{,}3 = \underline{\underline{68{,}58\ \mathrm{m}}}$$]

Zacchini musel provést podobné výpočty. Věděl navíc, že odpor vzduchu zbrzdí jeho pohyb, a proto použil rozměrnou síť a posunul ji o něco blíže k dělu. Samozřejmě nepředvídatelnost vlivu prostředí bude jistou nejistotu při každém opakování experimentu.

Dalším nebezpečím je velké zrychlení při výstřelu – je tak velké, že způsobuje krátkou ztrátu vědomí. Kdyby artista dopadl do sítě ještě v bezvědomí, mohl by si zlomit vaz.

4.7. Rovnoměrný pohyb po kružnici

Nejprve několik přípravných úvah k délce oblouku (= délce části kružnice o poloměru r):



d_1 = délka oblouku $\overset{\frown}{AB}$

d_2 = délka oblouku $\overset{\frown}{CD}$

oba oblouky jsou vymezeny stejným úhlem θ

platí $\boxed{\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{d_2}{d_1}}$ (*)

(protože poměr délky ve větší kružnici k odpovídající délce v menší kružnici zůstává zachován)

Pokud by nastalo $r_1 = 1$ (jednotková kružnice), odpovídající délka oblouku d_1 je přímo rovna velikosti úhlu θ v obloukové míře (= v radiánech)... to je definice obloukové míry úhlů (viz str. 48): $d_1 = \theta$ (radiánů), tedy vzorec (*) přechází do tvaru

$$\frac{r_2}{1} = \frac{d_2}{\theta},$$

čili platí $\boxed{d_2 = r_2 \cdot \theta}$ (**)

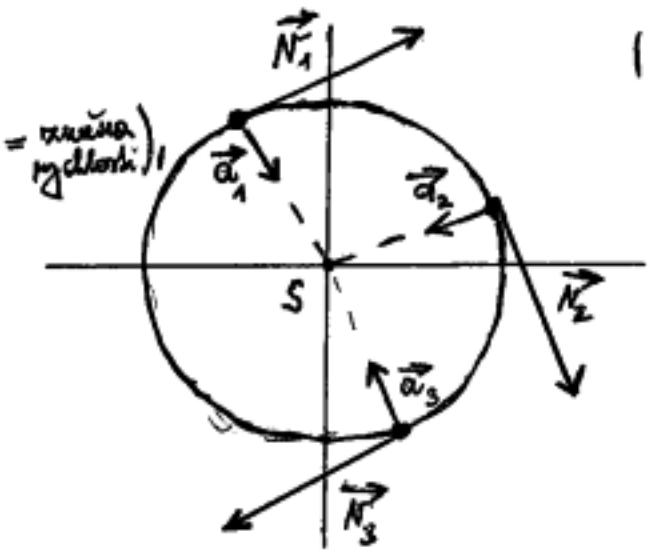
(za θ ovšem musíme dosazovat v obloukové míře, nikoli ve stupních).

Speciálně délka obvodu kruhu o poloměru r je podle (**) rovna

(index ze vzorce (**) vypouštíme, protože už uvažujeme pouze jednu kružnici)

$$\boxed{\text{délka obvodu kružnice} = r\cdot(\text{plný úhel}) = r\cdot 2\pi} \quad (4.23)$$

Věnujme se teď už rovnoměrnému pohybu po kružnici – jedná se o pohyb po kruhové trajektorii, kdy velikost rychlosti je pořád stejná, ale mění se její směr... v každém bodě kruhové trajektorie má vektor $\vec{v}$ směr tečny k dané kružnici:



$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = |\vec{v}_3|$

$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3|$

mohlo by se zdát, že protože velikost rychlosti je konstantní (a zrychlení = změna rychlosti), vektor zrychlení $\vec{a}$ bude nulový; ale to není pravda – díky změně směru vektoru $\vec{v}$ je i vektor $\vec{a}$ nenulový

($\vec{a}$ má konstantní velikost, ale proměnlivý směr... směřuje stále do středu kružnice).

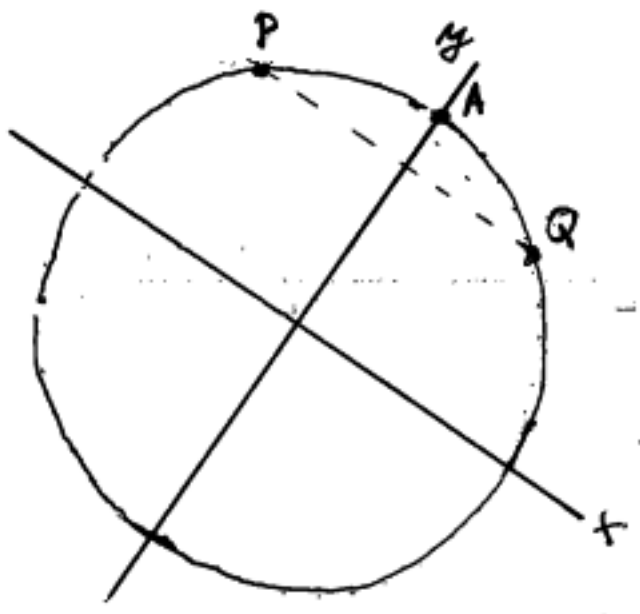
Vypočtěme nyní přesněji velikost a směr vektoru zrychlení $\vec{a}$. Učiníme tak ve dvou krocích:

a) určíme nejprve průměrné zrychlení $\bar{\vec{a}}$ mezi dvěma různými body P, Q kruhové trajektorie

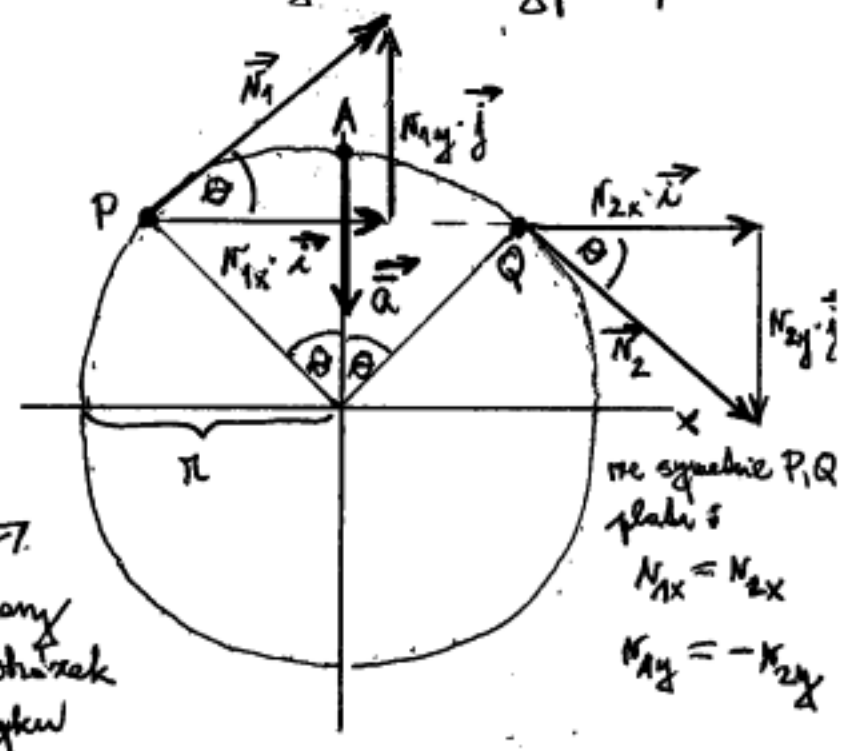
b) limitním přechodem pro vzdálenost bodů P, Q jdoucí k nule nalezneme vektor $\vec{a}$ okamžitého zrychlení

ad a) <u>Určení průměrného zrychlení $\bar{\vec{a}}$ při rovnoměrném pohybu po kružnici</u>

Nejprve vhodnou volbou soustavy souřadnic zajistíme, aby body P, Q byly symetrické vzhledem k ose y (to lze vždy provést, a navíc to vede ke zjednodušení výpočtů):



volba soustavy souřadnic: obrázek rotujeme jen ze zvyku (mohl by zůstat i naopak – důležitá je poloha souřadných os)



ve symetrie P, Q platí:

$v_{1x} = v_{2x}$

$v_{1y} = -v_{2y}$

označme $\vec{\bar{a}} = (\bar{a}_x, \bar{a}_y)$ a můžeme počítat:

$\bar{a}_x = \dfrac{v_{2x} - v_{1x}}{\Delta t} = 0$, protože složky rychlosti ve směru osy x jsou v bodech P, Q stejné ($v_{1x} = v_{2x}$)

$$\bar{a}_y = \frac{v_{2y} - v_{1y}}{\Delta t} = \frac{-|\vec{v}|\cdot\sin\theta - |\vec{v}|\cdot\sin\theta}{\frac{r\cdot 2\theta}{|\vec{v}|}} = \frac{-2\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta}{\frac{r\cdot 2\theta}{|\vec{v}|}} = \underline{\underline{-\frac{|\vec{v}|^2}{r}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}}}$$

podle vzorce (4.9)

$v_{2y} = -|\vec{v}|\sin\theta$ (minus díky tomu, že v_{2y} $\vec{j}$ směřuje záporným směrem osy y)

$v_{1y} = |\vec{v}|\sin\theta$

Δt určíme podle vzorce (2.3), který platí pro absolutní velikost průměrné rychlosti při pohybu po jakékoli (nejen přímočaré, ale třeba i kruhové) trajektorii:

$$|\vec{\bar{v}}| = \frac{\text{délka trajektorie}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\text{délka trajektorie}}{|\vec{\bar{v}}|} = \frac{\text{délka oblouku } PQ}{|\vec{v}|} = \frac{r\cdot 2\theta}{|\vec{v}|}$$

$|\vec{\bar{v}}| = |\vec{v}|$ podle (**) na str. 101

Tedy celkem $\underline{\underline{\vec{\bar{a}} = \left(0, -\frac{|\vec{v}|^2}{r}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\right)}}$ ... vektor směřuje v záporném směru osy y; i na obrázku je umístěn do bodu A, protože v něm budeme v následujícím bodě počítat limitní přechod

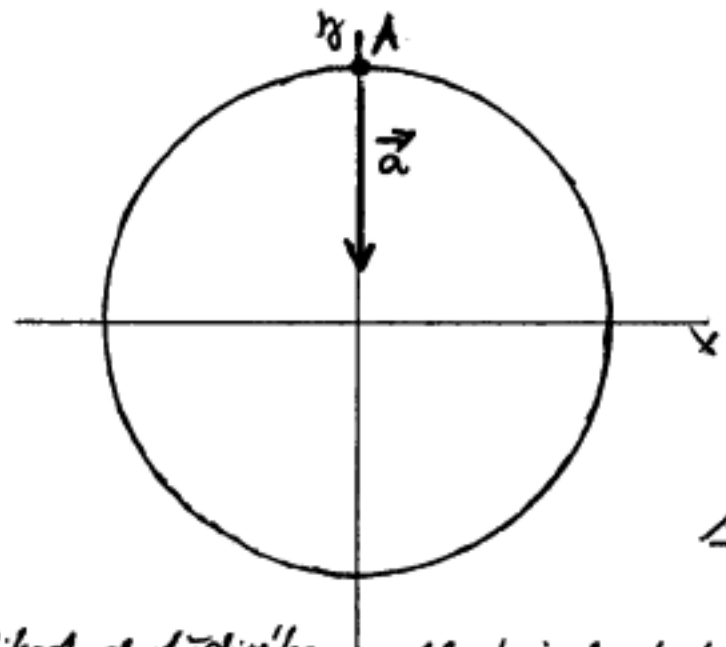
ad b) <u>Určení okamžitého zrychlení $\vec{a}$ při rovnoměrném pohybu po kružnici</u>

Nyní limitním přechodem budeme přibližovat body P, Q k sobě, až nakonec P = A = Q (symetrie bodů P, Q bude v limitním přechodu zachována).

Pak průměrné zrychlení se v tomto limitním přechodu pro neustále menší úhel θ stane okamžitým zrychlením $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \lim_{\theta\to 0}\vec{\bar{a}} = \lim_{\theta\to 0}\left(0, -\frac{|\vec{v}|^2}{r}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\right) = \underline{\underline{\left(0, -\frac{|\vec{v}|^2}{r}\right)}}$$

$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ ... tento vztah dokážeme na následující straně



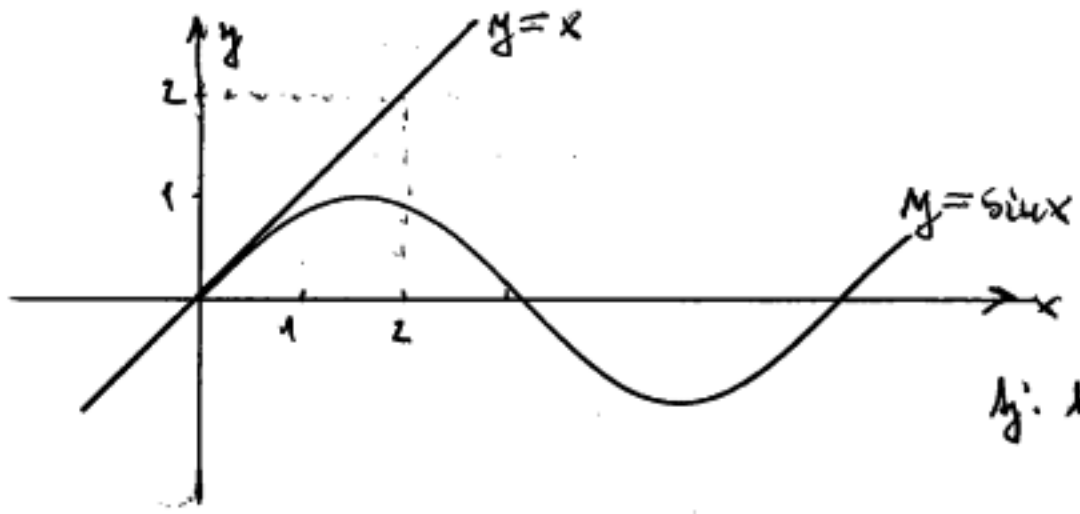
protože A je libovolný bod kružnice (nejprve jsme zvolili A, a pak teprve soustavu souřadnic) <u>směřuje vektor $\vec{a}$ vždy do středu kruhu</u> a platí

(velikost dostředivého zrychlení je konstantní:) $\boxed{|\vec{a}| = \frac{|\vec{v}|^2}{r}}$ (4.22)

Jak jsem slíbil na předchozí straně, ukážeme teď, že platí $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

Tento fakt lze spočítat několika způsoby, ukážeme zde dva z nich:

a) z geometrického názoru: nakreslíme-li do jednoho obrázku grafy funkcí $y = x$, $y = \sin x$,



vidíme, že pro hodnoty x blížící se k nule se grafy obou funkcí k sobě přibližují, tj. blíží se k sobě funkční hodnoty:

$\sin x \doteq x$,

Tj. jejich podíl se blíží hodnotě $\frac{\sin x}{x} \doteq \frac{x}{x} = 1$.

(nyní jen místo x budeme psát θ a máme zatím důkaz hotový!)

b) limitu lze spočítat s využitím derivace pomocí tzv. l'Hospitalova pravidla:

(toto pravidlo zní:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{pokud } \lim\limits_{\theta \to \theta_0} f(\theta) = 0 = \lim\limits_{\theta \to \theta_0} g(\theta) \text{ nebo } \lim\limits_{\theta \to \theta_0} f(\theta) = \infty = \lim\limits_{\theta \to \theta_0} g(\theta) \\ \text{a existují limity } \lim\limits_{\theta \to \theta_0} f'(\theta),\ \lim\limits_{\theta \to \theta_0} g'(\theta), \\ \text{tak } \lim\limits_{\theta \to \theta_0} \frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \lim\limits_{\theta \to \theta_0} \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)} \end{array}} \quad (L$$

Když nyní chceme určit limitu zlomku $\frac{\sin\theta}{\theta}$ pro θ jdoucí k nule, označme $f(\theta) = \sin\theta$

$g(\theta) = \theta$, pak vidíme, že platí $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\theta \to 0} \sin\theta = 0 \\ \lim\limits_{\theta \to 0} \theta = 0 \end{array}\right\}$ tedy zkusme

použít pravidlo (L):

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \overset{(L)}{=} \lim_{\theta \to 0} \frac{(\sin\theta)'}{(\theta)'} \overset{\text{vzorce (D1), (D4)}}{=} \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

nyní už po dosazení $\theta = 0$ je vidět, že limita zde se rovná funkční hodnotě

(l'Hospitalovým pravidlem lze počítat limity takových zlomků, kde

po dosazení θ_0 vychází neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$)

to znamená, že přímo v bodě θ_0 hodnota zlomku není definována, ale pro θ blízké hodnotě θ_0 se hodnota zlomku $\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$ blíží hodnotě limity

Ale vraťme se už zpět k rovnoměrnému pohybu po kružnici:

<u>Kontrola 6</u>. Těleso se pohybuje v souřadnicové rovině xy po kruhové dráze se středem v počátku. Bodem $B = [-2; 0]$ prochází rychlostí $-4\,ms^{-1}\cdot\vec{j}$. Určete

a) rychlost v bodě $C = [2, 0]$

b) zrychlení v bodě $C = [2, 0]$

<u>Příklad 28.</u> Stíhací piloti se opakovaně obávají příliš prudkých vzletů. Je-li totiž tělo pilota vystaveno velkému dostředivému zrychlení v situaci, kdy hlava směřuje do středu křivosti vzletové dráhy, dochází k odtoku mozku a poruše mozkových funkcí.

Úplná ztráta vědomí předchází několik varovných příznaků: je-li velikost dostředivého zrychlení mezi hodnotami 2g a 3g, cítí se pilot být jakoby „těžký". Při hodnotě 4g začíná vidět pouze červeně a jeho zorný úhel se zmenšuje (tzv. tunelové vidění). Je-li takovému zrychlení vystaven delší dobu, anebo se velikost zrychlení dokonce ještě zvětší, přestává pilot vidět úplně a vzápětí ztrácí vědomí (stav g-LOC ... loss of consciousness = ztráta vědomí).

Jaké je dostředivé zrychlení (v jednotkách g), pilota stíhačky F-22 při průletu kruhové vzletové dráhy o poloměru 5,8 km rychlostí o velikosti $v = |\vec{v}| = 2\,580\,km\,h^{-1}$ ($= 716\,ms^{-1}$)?

[řešení: $a = |\vec{a}| = \frac{v^2}{r} = \frac{716^2}{5800} \doteq 88{,}39 \doteq 9g$ ... v takové situaci by pilot téměř okamžitě upadl do bezvědomí bez jakýchkoli varovných příznaků]

při označení $v = |\vec{v}|$

<u>Př. 29.</u> Umělá družice je na oběžné dráze kolem Země ve výši $h = 200$ km nad zemským povrchem. V této výšce má gravitační zrychlení (= dostředivé zrychlení ... viz kapitola 6) velikost $g = |\vec{g}| = 9{,}2\,ms^{-2}$. Jaká je oběžná rychlost $\vec{v}$ družice?

[Využijeme opět vzorce (4.22), kde $|\vec{a}| = a = g$, $r = R_Z + 200\,000$ m (poloměr Země $R_Z = 6\,378$ km $= 6\,378\,000$ m)

$$9{,}2 = \frac{v^2}{6\,378\,000 + 200\,000} \Rightarrow v = 7\,779\,ms^{-1} = \underline{\underline{7{,}779\,km\,s^{-1}}}$$

(podle vzorce (2.3) dráha $= v \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi \cdot 6\,378\,000}{7779} \doteq 5152\,s =$ při jednom oběhu dráha $= 2\pi \cdot r$ podle (4.23)

$\Rightarrow 5152\,\cancel{s} \cdot \frac{1\,h}{3600\,\cancel{s}} = 1{,}43\,h$ ... doba jednoho oběhu družice kolem země)]
(= perioda oběhu)

4.8. Vzájemný pohyb po přímce

Zatím jsme při popisu pohybu používali jednu konkrétní vztažnou soustavu (= vhodně zvolený objekt, vůči kterému jsou souřadné osy pevné), a sice povrch země.
Při popisu některých pohybů je vhodné volit vztažnou soustavu jinou. Někdy je také potřeba spojit výsledky měření ze dvou různých vztažných soustav. Těmto otázkám se bude věnovat tento a následující dva odstavce (4.9, 4.10).

Celou problematiku vysvětlíme nejprve na příkladu vzájemného pohybu po přímce. Jako přímočarý pohyb lze popsat jízdu auta po přímé dálnici. Uvažujme dvě různé vztažné soustavy:

- vztažná soustava A ... Aleš sedící v autě v odstaveném prvku, kde je zaparkováno (Aleš = počátek vztažné soustavy A)
- vztažná soustava B ... Barbora jdoucí v prvém pruhu konstantní rychlostí v_{BA} (Barbora = počátek vztažné soustavy B)

Při popisu pohybu rychlého auta P jdoucího v levém pruhu (ve stejném směru jako Barbora) se tento pohyb bude jevit jinak Alešovi (= vztažné soustavě A), jinak Barboře (= vztažné soustavě B).

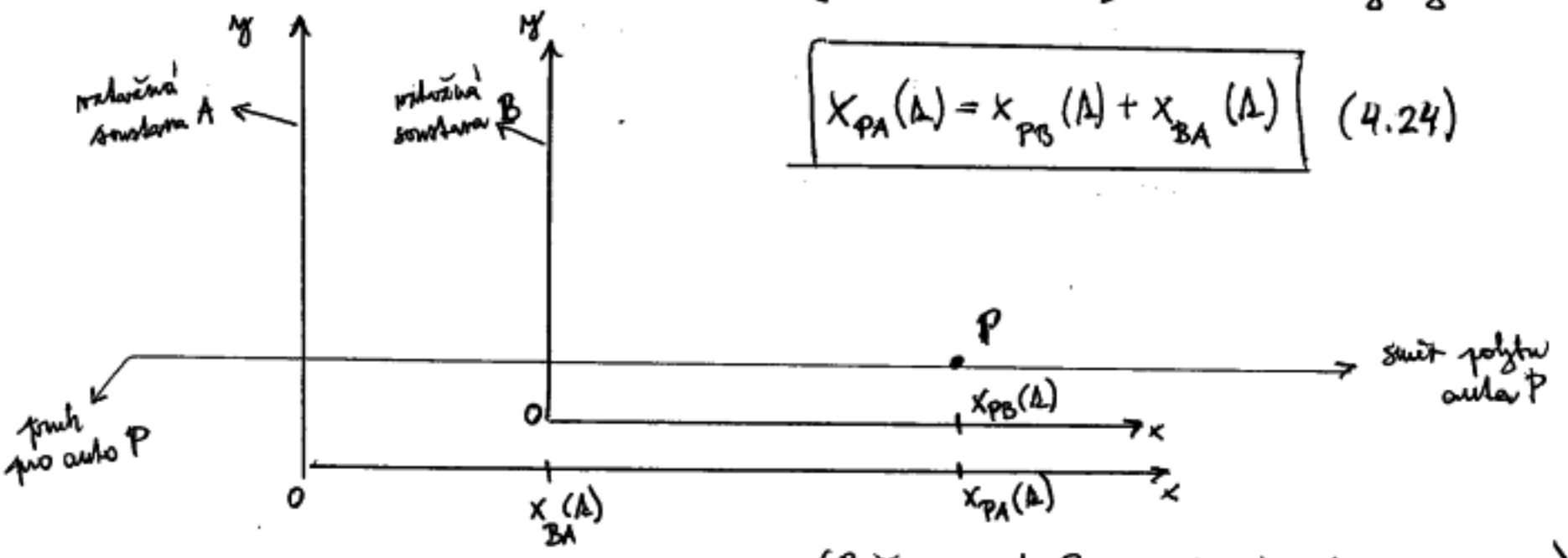
a) oba pozorovatelé (Aleš i Barbora) změří ve stejném okamžiku polohu auta P vzhledem k sobě jako počátku soustavy souřadnic

x_{PA} ... poloha auta P vzhledem k Alešovi (= ve vztažné soustavě A)

x_{PB} ... poloha auta P vzhledem k Barboře (= ve vztažné soustavě B)

Ještě také ve stejném okamžiku změříme x_{BA} ... polohu Barbory vzhledem k Alešovi (= ve vztažné soustavě A)

Celou situaci lze znázornit na obrázku: je vidět, že pro polohy v okamžiku t platí (osy y nejsou nutné, protože zatím popisujeme pohyb ve směru osy x; ale nakreslili jsme je ze zvyku)



$$\boxed{x_{PA}(t) = x_{PB}(t) + x_{BA}(t)} \quad (4.24)$$

(Barbora i auto P se pohybují ve kladném směru osy x v obou souřadných soustavách)

Kromě vztahu mezi polohami při popisu pohybu nás bude zajímat i vztah mezi rychlostmi. Protože z kapitoly 2 víme, že rychlost v okamžiku t je rovna derivaci polohy v okamžiku t (vztah (2.4): $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$), derivací (4.24) dostaneme

$$\underbrace{\frac{d}{dt} x_{PA}(t)}_{v_{PA}(t)} = \underbrace{\frac{d}{dt} x_{PB}(t)}_{v_{PB}(t)} + \underbrace{\frac{d}{dt} x_{BA}(t)}_{v_{BA}(t)}$$, jinými slovy

$$\boxed{v_{PA}(t) = v_{PB}(t) + v_{BA}(t)} \quad (4.25)$$

kde v_{PA} ... rychlost auta P vzhledem ke vztažné soustavě A

v_{PB} ... rychlost — " — B

v_{BA} ... rychlost vztažné soustavy B (= Barbory) vzhledem ke vzt. s. A (= Aleši)

(pomůcka pro zapamatování 4.24, 4.25: – indexy blízké znaménku ⊕ na pravé straně jsou stejné ... rovny B
– indexy nedlouhé znaménku ⊕ na pravé straně jsou stejné jako indexy na levé straně rovnice, a navíc ve stejném pořadí)

b) Následující úvahu provedeme pouze pro případ, kdy vztažná soustava B se pohybuje vůči vztažné soustavě A konstantní rychlostí ($v_{BA}(t) = v_{BA} = \text{konstanta}$):
[pohyb automobilu P není omezen ničím, může být rychlený i zpomalený, kladný i záporný]
Postupme ještě o krok dále a určeme vztah mezi zrychleními v obou vztažných soustavách: protože $a = \frac{d}{dt} v(t)$ (vztah 2.8), vztah pro zrychlení a_{PA} získáme derivací (4.25):

$$\underbrace{\frac{d}{dt} v_{PA}(t)}_{a_{PA}(t)} = \underbrace{\frac{d}{dt} v_{PB}(t)}_{a_{PB}(t)} + \underbrace{\frac{d}{dt} v_{BA}}_{\text{derivací konstanty je nula!}}$$, kde

viz vzorec D₀ na str. 12

$$\boxed{a_{PA}(t) = a_{PB}(t)} \quad (4.26)$$

Těleso má stejné zrychlení ve všech vztažných soustavách, které se vůči sobě navzájem pohybují konstantními rychlostmi !

Kontrola 7. V následující tabulce jsou uvedeny některé rychlosti v_{PB}, v_{BA}, v_{PA} pro tři různé situace. Doplňte chybějící hodnoty (všechny v km/hod)

situace	v_{PB}	v_{BA}	v_{PA}
1	?	50	50
2	40	30	?
3	−20	?	60

Př. 30. Aleš parkuje na okraji silnice, která vede od východu na západ. Sleduje automobil P jedoucí západním směrem. Bartova jede na východ rychlostí $v_{BA} = 52$ km/h a také pozoruje vůz P. Směr od západu k východu považujeme za kladný.

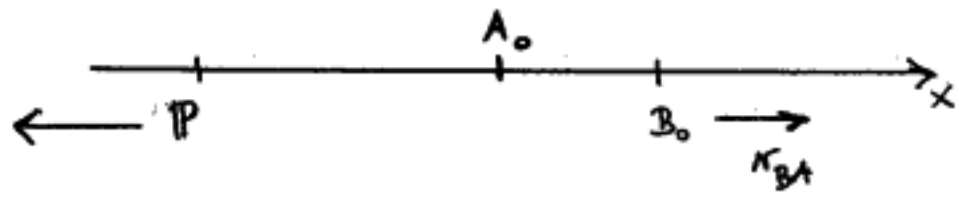
(a) V určitém okamžiku Aleš zjistil, že se vůz P pohybuje rychlostí 78 km/h. Jakou rychlost vozu P naměřila ve stejném okamžiku Bartova?

(b) Aleš zpozoroval, že vůz P se po 10 s brzdění zastavil. Jaké zrychlení vozu P Aleš naměřil za předpokladu, že vůz P brzdil rovnoměrně?

(c) Bartora naměřila totéž zrychlení jako Aleš. Ověřte její měření ještě také výpočtem vzhledem k její vztažné soustavě.

[řešení:

ad a) Je potřeba nakreslit obrázek a dát pozor na orientaci rychlostí:



$v_{PA} = -78\ \mathrm{km\,h^{-1}}$, protože vůz P se pohybuje v záporném směru

$v_{BA} = 52\ \mathrm{km\,h^{-1}}$

dosazením do (4.25) dostaneme

$$-78 = v_{PB} + 52 \Rightarrow v_{PB} = \underline{\underline{-130\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}}}$$

Bartořino pozorování rychlosti vozu P je 130 km za hod západním směrem.

ad b) podle (2.11) $v_{PA}(t) = v_{0A} + a\cdot t$; ještě než dosadíme, převedeme v_0 na jednotky $\mathrm{ms^{-1}}$

$$v_{0A} = -78\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = -\frac{78}{3{,}6}\ \mathrm{ms^{-1}} = -21{,}67\ \mathrm{ms^{-1}}$$

Nyní dosadíme: $0 = -21{,}67 + a\cdot 10 \Rightarrow a = \frac{21{,}67}{10} = \underline{\underline{2{,}167\ \mathrm{ms^{-2}}}}$

ad c) Bartora naměřila totéž zrychlení – ověříme výpočtem:

$$v_{0B} = -130\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = -130\ \mathrm{km\,h^{-1}}\cdot\frac{1\ \mathrm{ms^{-1}}}{3{,}6\ \mathrm{km\,h^{-1}}} = -\frac{130}{3{,}6}\ \mathrm{ms^{-1}} = -36{,}11\ \mathrm{ms^{-1}}$$

$v_{PB}(10) = -52\ \mathrm{km\,h^{-1}} = -\frac{52}{3{,}6}\ \mathrm{ms^{-1}} = -14{,}44\ \mathrm{ms^{-1}}$ (sice P stojí, ale B se stále pohybuje)

Dosadíme pro (2.11) v soustavě B: $v_{PB}(10) = v_0 + a\cdot t$

$$-14{,}44 = -36{,}11 + a\cdot 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{-14{,}44 + 36{,}11}{10} = \underline{\underline{2{,}167\ \mathrm{ms^{-2}}}}$$ ... vyšlo to stejně !!!]

(Do rovnice (2.11) lze dosazovat i „nestejné" jednotky, ale museli bychom je vypsat u každého členu: např. ad b)

$$0\ \mathrm{km\,h^{-1}} = -78\ \mathrm{km\,h^{-1}} + a\cdot 10\ \mathrm{s} \Rightarrow a = \frac{78\ \mathrm{km\,h^{-1}}}{10\ \mathrm{s}} =$$

$$= \frac{78\ \mathrm{km\,h^{-1}}}{10\ \mathrm{s}}\cdot\underbrace{\frac{1\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{3{,}6\ \mathrm{km\,h^{-1}}}}_{=1} = \frac{78}{36}\ \frac{\mathrm{m\,s^{-1}}}{\mathrm{s}} = 2{,}167\ \mathrm{m\,s^{-1}\cdot s^{-1}} = \underline{\underline{2{,}167\ \mathrm{m\,s^{-2}}}}$$

podle rovnice $\boxed{s^m\cdot s^n = s^{m+n}}$ (4.27))

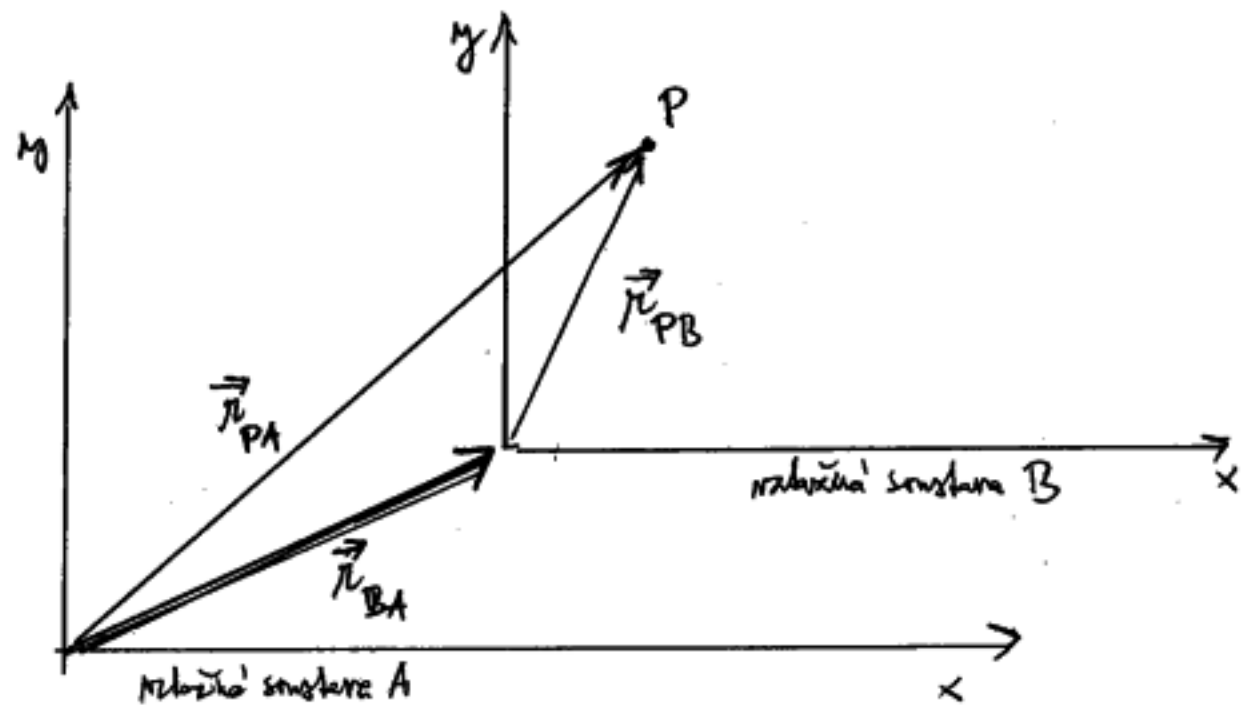
4.9. Vzájemný pohyb v rovině

Přidáme nyní k našemu uvažování jednu dimenzi – budeme popisovat pohyb tělesa v rovině vzhledem k různým vztažným soustavám. Vzorce budou podobné, ovšem nikoli skalární, ale vektorové.

Budeme uvažovat jen speciální případ dvou různých vztažných soustav A, B, pro které – osy x (a stejně i osy y) obou soustav jsou navzájem rovnoběžné

– soustava B se vzhledem k soustavě A pohybuje rychlostí $\vec{v}_{BA}$, která je konstantní ($\vec{v}_{BA}$ je konstantní vektor)

a) Ve stejném časovém okamžiku t je poloha tělesa (nebo částice) P v každé ze vztažných soustav vyjádřena polohovým vektorem $\vec{r}$:



$\vec{r}_{BA}$ ... polohový vektor počátku soustavy B vzhledem ke vztažné soustavě A

$\vec{r}_{PA}$ ... poloha bodu P vzhledem ke vztažné soustavě A

$\vec{r}_{PB}$ ... — " — B

Z obrázku je vidět, že platí vektorová rovnice $\boxed{\vec{r}_{PA}(t) = \vec{r}_{PB}(t) + \vec{r}_{BA}(t)}$ (4.28)

Derivací rovnice (4.28) podle času:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\vec{r}_{PA}(t)}_{\vec{v}_{PA}(t)} = \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{r}_{PB}(t)}_{\vec{v}_{PB}(t)} + \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{r}_{BA}(t)}_{\vec{v}_{BA}(t)}$$

(s využitím (4.6)),

máme tedy

$$\boxed{\vec{v}_{PA}(t) = \vec{v}_{PB}(t) + \vec{v}_{BA}} \quad (4.29)$$

proměnnou t nepřináší, protože

$\vec{v}_{BA}(t) = \vec{v}_{BA}$ = konstantní vektor,

to jsme předpokládali

b) při předpokladu konstantního $\vec{v}_{BA}$ dostaneme derivací (4.29) vztah pro zrychlení:

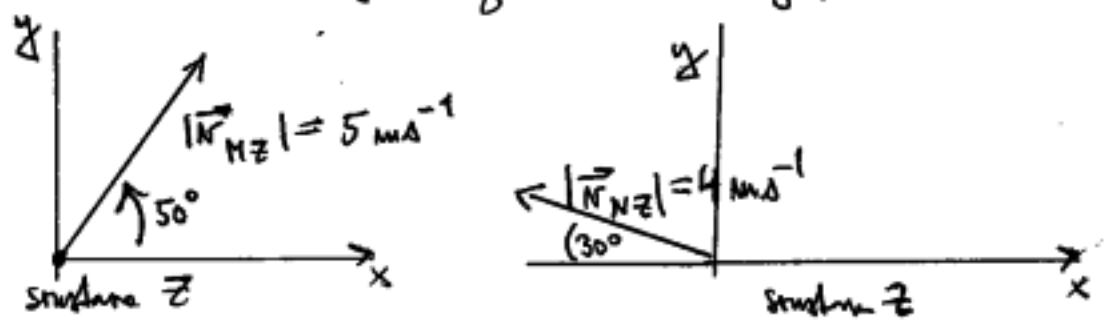
$$\underbrace{\frac{d}{dt}\vec{v}_{PA}(t)} = \frac{d}{dt}\vec{v}_{PB}(t) + \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{v}_{BA}}$$

derivací konstantního vektoru je nulový vektor,

$$\boxed{\vec{a}_{PA}(t) = \vec{a}_{PB}(t)} \quad (4.30)$$

opět platí, že při konstantních vzájemných rychlostech vztažných soustav je v libovolné z nich naměřeno stejné zrychlení

Př. 31. Nalopýr letí rychlostí $\vec{v}_{NZ}$ vzhledem k mouchu letící rychlostí $\vec{v}_{MZ}$ (viz obrázek, obě rychlosti jsou vztaženy vzhledem k povrchu země).
Určete rychlost $\vec{v}_{MN}$ mouchy vzhledem k nalopýrovi – vyjádřete ji v kartézských souřadnicích (= pomocí jednotkových vektorů $\vec{i}, \vec{j}$):



Řešení: na pomocném (viz kapitola 3) určíme nejprve $\vec{v}_{MZ}, \vec{v}_{NZ}$ v kartézských souřadnicích:

$$\vec{v}_{MZ} = (5\cdot\cos 50°,\ 5\cdot\sin 50°) = (3{,}214;\ 3{,}830) \text{ v metrech za sekundu}$$

$$\vec{v}_{NZ} = (-4\cdot\cos 30°,\ 4\cdot\sin 30°) = (+3{,}464;\ 2) \text{ v metrech za sekundu}$$

Pro stanovení $\vec{v}_{MN}$ lze užít vzorec (4.29) ve smyslu

$$\vec{v}_{MN} = \vec{v}_{MZ} + \vec{v}_{ZN}$$

nový index Z byl přidán jako „vnitřní" (tj. index blížící se znaménkem ⊕ indexy MN vzdalovají na pravé straně jako vnější, a to se stejným pořadím jako na levé

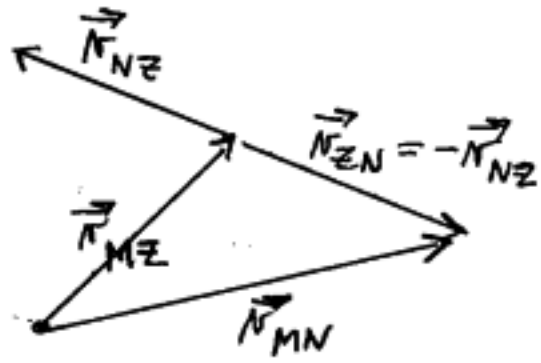
= vzdalovací od znaménka ⊕

$\vec{v}_{MZ}$ ... rychlost na stadiu

$\vec{v}_{ZN}$ ... rychlost Zemského povrchu vzhledem k vetroplachu (vetroplach je považován za pevný bod, „pohybuje" se zemský povrch)

$$\Downarrow \quad \vec{v}_{ZN} = -\vec{v}_{NZ}$$

(rychlost zemského povrchu má stejnou velikost, ale směřuje opačným směrem než pohyb vetroplachu)



Celkem máme

$$\vec{v}_{MN} = (3{,}214;\ 3{,}830) - (-3{,}464;\ 2) = (6{,}678;\ 1{,}83)$$ v metrech za sekundu $=$

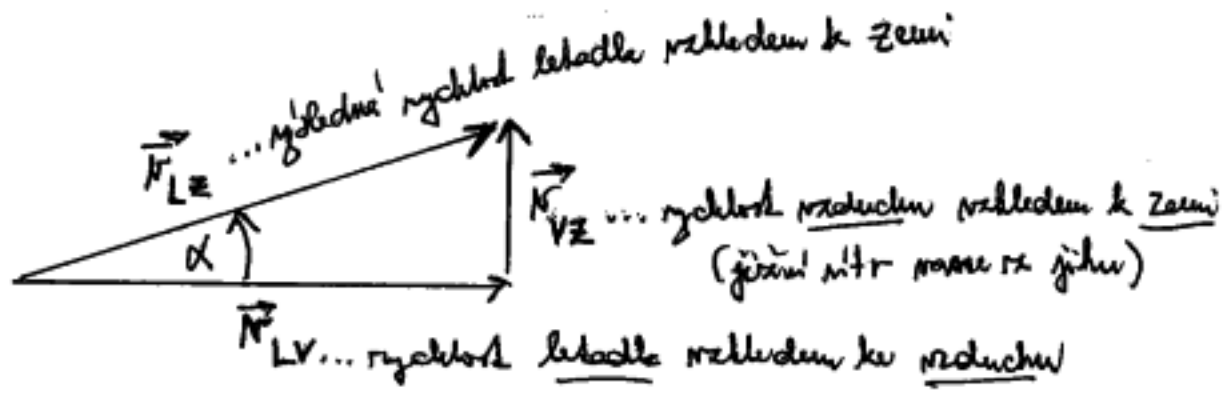
$$= \underline{\underline{6{,}678\ \mathrm{ms^{-1}} \cdot \vec{i} + 1{,}83\ \mathrm{ms^{-1}} \cdot \vec{j}}}$$]

<u>Př. 32</u>. Kompas na palubě letadla udává, že letadlo směřuje k východu. Palubní rychlotměr udává rychlost 215 km h^{-1} vzhledem k okolnímu vzduchu. Vane stálý jižní vítr rychlostí 65 km h^{-1}.

(a) Jaká je rychlost letadla vzhledem k zemi?

(b) Jaký kurs na palubním kompasu musí pilot udržovat, chce-li skutečně letět na východ?

[Řešení: ad a)



$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_{LV} = (215;\ 0) \quad \text{v km h}^{-1} \\ \vec{v}_{VZ} = (0;\ 65) \quad \text{v km h}^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_{LZ} = (215;\ 0) + (0;\ 65) = (215;\ 65)$$

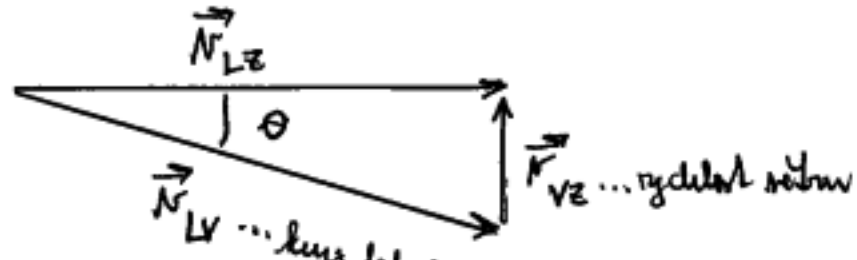
Určíme ještě velikost a směr vektoru $\vec{v}_{LZ}$:

$$v_{LZ} = |\vec{v}_{LZ}| = \sqrt{215^2 + 65^2} \doteq \underline{\underline{224{,}61\ \mathrm{km\,h^{-1}}}}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{65}{215} = \underline{\underline{16{,}82^\circ}}$$

Letadlo vzhledem k zemi letí rychlostí o velikosti $224{,}61\ \mathrm{km\,h^{-1}}$, odkloněno $16{,}82^\circ$ na sever od východního kursu.

ad b) Aby výsledná rychlost $\vec{v}_{LZ}$ směřovala na východ, musí letadlo nastavit kurs vzhledem ke vzduchu tak trochu proti větru, tj. odkloněn na jih:



$$\sin\theta = \frac{65}{215} \Rightarrow \underline{\underline{\theta \doteq 17{,}6^\circ}}$$

, velikost $v_{LV} = |\vec{v}_{LV}| = 215\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ zůstává stejná

$$v_{LZ}^2 = 215^2 - 65^2 = 42\,000 \Rightarrow v_{LZ} = |\vec{v}_{LZ}| = \sqrt{42000} \doteq \underline{\underline{204{,}94}}$$

$$\vec{v}_{LZ} = (204{,}94;0) = 204{,}94\cdot\vec{i}$$

Pilot letící na východ vzhledem k zemi musí na palubní desce nastavit kurs $17{,}6^\circ$ odkloněn na jih od východního směru (na východ vzhledem k zemi poletí pak rychlostí o velikosti $204{,}94\ \mathrm{km\,h^{-1}}$).

4.10. Vzájemný pohyb při vysokých rychlostech

V oddílu (4.8) jsme odvodili vztah (4.25) o tom, že rychlost v_{PA} vzhledem ke vztažné soustavě A lze získat jako součet jejích dvou rychlostí, v_{PB}, v_{BA}. Tento vztah ale při dostatečně velkých rychlostech přestává platit !!!!

Na tuto věc přišla tzv. speciální teorie relativity, která přinášela o vysokých rychlostech, činila experimenty, a nakonec sestavila vzorce platící pro libovolnou rychlost.

Speciální teorie relativity tvrdí, že neexistuje (není možná) rychlost větší než rychlost světla ve vakuu

$$\boxed{c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m\,s^{-1}}} \quad (4.31)$$

Jaká rychlost je vysoká?

rychlost auta ... $41{,}667\ \mathrm{ms^{-1}} = 150\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$

rychlost dopravního letadla ... $166{,}667\ \mathrm{ms^{-1}} = 600\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$

rychlost zvuku ... $340\ \mathrm{ms^{-1}} = 1224\ \mathrm{km\,h^{-1}}$

rychlost nadzvukového letadla (letí rychleji než zvuk) ... větší než rychlost zvuku

rychlost družice na oběžné dráze kolem Země ... $7\,611{,}111\ \mathrm{ms^{-1}} = 27\,400\ \mathrm{km\,h^{-1}}$

rychlost elektronu při urychlení napětím 10 miliónů voltů ... $0{,}9988\cdot c \doteq$

$\doteq 299\,432\,707\ \mathrm{ms^{-1}} \doteq 1\,077\,957\,745\ \mathrm{km\,h^{-1}}$

(asi 1 miliarda kilometrů za hodinu)

rychlost elektronu při urychlení napětím 20 miliónů voltů ... $0{,}9997\cdot c$ ... je stále menší než c

Speciální teorie relativity dokázala, že při sčítání rychlostí blízkých rychlostem světla přestává platit vztah (4.25) a platí

$$\boxed{v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + \frac{v_{PB}\cdot v_{BA}}{c^2}}} \qquad (4.32)$$

Ze vztahu (4.32) je vidět, že pro v_{PB}, v_{BA} mnohem menší než c je zlomek $\frac{v_{PB}\cdot v_{BA}}{c^2}$ velmi malý, a tak $1 + \frac{v_{PB}\cdot v_{BA}}{c^2} \doteq 1$, tj. vztah (4.32) přechází v rovnici (4.25).

<u>Př. 33.</u> (malé rychlosti). Pro $v_{PB} = v_{BA} = 0{,}0001\ c$ určete v_{PA} z rovnic <u>(4.25) a (4.32), výsledky porovnejte.</u>

[rychlost $v_{PB} = v_{BA} = 0{,}0001\ c \doteq 29\,979{,}2458\ \mathrm{ms^{-1}}$ je větší než rychlost družice na oběžné dráze, ale v porovnání s rychlostí c je to stále malá rychlost.

užijme (4.25): $v_{PA} = 29\,979{,}2458 + 29\,979{,}2458 = 59\,958{,}4916\ \mathrm{ms^{-1}} =$

$= 0{,}0002\cdot c$

užijme (4.32): $v_{PA} = \dfrac{0{,}0002\cdot c}{1 + \dfrac{0{,}0001\cdot \cancel{c}\cdot 0{,}0001\cdot \cancel{c}}{c^{\cancel{2}}}} = \dfrac{0{,}0002\cdot c}{1 + 0{,}00000001} =$

$= 59\,958{,}4910004\ \mathrm{ms^{-1}}$

Protože rychlosti jsou v porovnání s rychlostí c malé, rozdíl ve vzorcích je menší

než 1 mm za sekundu; lze v těchto případech používat oba vzorce, respektive stačí užít jednodušší vzorec (4.25).]

Př. 34. (vysoké rychlosti) Určete v_{PA} ze vztahů (4.25), (4.32), je-li $v_{PB} = v_{BA} = 0{,}65 \cdot c$ (což je 65 % rychlosti světla).

[řešení:

užijme (4.25): $v_{PA} = 0{,}65 \cdot c + 0{,}65 \cdot c = \underline{\underline{1{,}3 \cdot c = 389\,730\,195{,}4 \text{ ms}^{-1}}}$

užijme (4.32): $$v_{PA} = \frac{0{,}65c + 0{,}65c}{1 + \frac{0{,}65 \cdot \cancel{c} \cdot 0{,}65 \cancel{c}}{\cancel{c^2}}} = \frac{1{,}3\,c}{1 + 0{,}4225} =$$

$$= \frac{1{,}3}{1{,}4225} \cdot c = \underline{\underline{0{,}91388 \cdot c \doteq 273\,975\,532{,}794 \text{ ms}^{-1}}}$$

V tomto případě vzorec (4.25) přestává platit, čili vypočtl nesmysl, protože podle speciální teorie relativity žádný pozorovatel nemůže naměřit rychlost větší než c. Lze užít jen vzorec (4.32), který funguje tak, že „součtem v teorii relativity" dvou rychlostí menších nebo rovných c dostaneme rychlost zase menší nebo rovnu c.]

I při „sčítání" nejvyšších možných rychlostí, tj. $v_{PB} = v_{BA} = c$ dostaneme podle (4.32)

$$v_{PA} = \frac{c + c}{1 + \frac{c \cdot c}{c^2}} = \frac{2c}{1+1} = \frac{2}{2} \cdot c = \underline{\underline{c}}$$

Otázky k opakování -

Kapitola 4: Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb

94. Jak se definuje poloha hmotného bodu v prostoru? (vztah 4.1)
95. Co je to posunutí? (vztahy 4.2, 4.3)
96. Jak se definuje průměrná rychlost? (vztahy 4.4, 4.5) Jaký je její geometrický význam vzhledem ke trajektorii?
97. Jaký je vztah mezi vektorem průměrné rychlosti a vektorem posunutí?
98. Jak se definuje okamžitá rychlost v prostoru? (vztah 4.6, označení 4.7, 4.8) Jaký je její geometrický význam vzhledem ke trajektorii?
99. Uveďte příklad parametrického vyjádření přímky (v rovině) a vysvětlete význam všech konstant i proměnných.
100. Parametrické vyjádření přímky v rovině není určeno jednoznačně – co musí splňovat dvě různá parametrická vyjádření téže přímky?
101. Uveďte příklad obecného vyjádření přímky – jaký je význam koeficientů u proměnných x, y?
102. Najděte obecné i parametrické vyjádření přímky zadané dvěma různými body.

103. Jak se definuje průměrné a okamžité zrychlení? (vztahy 4.9, 4.10, označení 4.11, 4.12)
104. Co je to kvadrant (a jakým způsobem kvadranty číslujeme)?
105. Jak najdeme úhel průvodiče bodu $[x, y]$ podle toho, v jakém kvadrantu se nachází?

106. Co je to šikmý vrh a z jakých předpokladů vycházíme při jeho popisu?
107. V jaké formě vystupuje při šikmém vrhu tíhové zrychlení?
108. Co je to elevační úhel a dolet při šikmém vrhu?
109. Uveďte příklady toho, že popis šikmého vrhu můžeme rozdělit na popis dvou přímočarých pohybů (míčky, skateboardisté).

110. Uveďte vztahy pro polohu a rychlost dvou přímočarých pohybů popisujících šikmý vrh ($v_x(t) = v_{0x}$, 4.15, 4.16, 4.17)
111. Jaký tvar má rovnice trajektorie při šikmém vrhu? (vztah 4.19)
112. Na příkladu ukažte dva různé postupy nalezení vrcholu paraboly.
113. Jaký je postup při kreslení grafu paraboly? (ukažte na příkladu)
114. Odvoďte vztah pro dolet R a vyjádřete pomocí vzorce (4.20) do tvaru (4.21).
115. Pro jaký elevační úhel θ_0 je při zanedbání odporu vzduchu dolet maximální?

116. Jaký je vztah mezi délkami oblouku dvou soustředných kružnic?

117. Určete pomocí vztahu 116 délku obvodu kružnice (vztah 4.23)

118. Nakreslete situaci rovnoměrného pohybu po kružnici (vektory rychlosti a zrychlení v různých bodech)

119. Odvoďte vektor $\vec{a}$ průměrného zrychlení při rovnoměrném pohybu po kružnici

120. Odvoďte vektor $\vec{a}$ okamžitého zrychlení při rovnoměrném pohybu po kružnici

121. Co říká l'Hospitalovo pravidlo?

---

122. Jaký je vztah mezi polohami a rychlostmi bodu P měřenými ve dvou různých vztažných soustavách A, B (4.24, 4.25... v dimenzi 2 máme vztahy 4.28, 4.29)?

123. Jaký je vztah mezi zrychlením hmotného bodu měřeným ve dvou různých souřadných soustavách a za jakých předpokladů platí? (4.26, 4.30)

124. Jaká je rychlost světla ve vakuu?

125. Jaký vztah platí pro součet rychlostí sousedných s rychlostí světla? (4.32)

Přehled cvičení ke kapitole 4

M 9. Parametrické a obecné vyjádření přímky (v rovině).

F 7. Průměrná a okamžitá rychlost (v prostoru).

F 8. Průměrné a okamžité zrychlení (v prostoru).

M 10. Parabola = graf kvadratické funkce.

F 9. Příklady na šikmý vrh.

F 10. Rovnoměrný pohyb po kružnici

M 11. Výpočet některých limit (také pomocí l'Hospitalova pravidla).

F 11. Vzájemný pohyb v různých vztažných soustavách.