7 Pravděpodobnostní modely – úvod

Břetislav Fajmon, UMAT FEKT, VUT Brno

Nyní ve druhé polovině kursu bude obsahem odlišná matematická disciplína, která snad má s numerickými metodami společnou jistou přibližnost, neurčitost – ale v jiném smyslu a v jiných situacích než u numerických metod. Pravděpodobnostní modely slouží jako matematický popis jisté neurčitosti při měření náhodných veličin nebo při vyjadřování vztahů mezi veličinami.

Šesti přednáškám 7–12 tohoto tématu odpovídají zhruba kapitoly 9 až 14 ve skriptech [1]. Občas budou použity též některé věci z kapitol 2,3,4 anglické učebnice [3].

Také je k dispozici sbírka úloh [2], kde sedm kapitol zhruba odpovídá sedmi týdnům cvičení.

K samostatnému procvičení této přednášky: po přečtení kapitoly 9 ve skriptech [1] můžete absolvovat str. 143-146 (otázky i příklady).

Jádrem této úvodní přednášky bude pět příkladů, na kterých budou vysvětleny základní pojmy matematické disciplíny pravděpodobnost.

Mohli bychom začít otázkou, co je to pravda. Odtud totiž je už jen krok k intuitivní představě o tom, co je to pravděpodobnost: disciplína, která zkoumá, zda jisté věci jsou podobné pravdě, a do jaké míry se shodují s pravdou.

Nicméně, otázkou „Co je to pravda?“ se v její obecné podobě nemůžeme nyní zabývat (možná bych jen odkázal na články na adrese `http://www.rozhovor.cz/souvislosti/index.php`**).**

Musíme se spokojit s následujícím přibližným vymezením: matematický obor „pravděpodobnost“ se pokouší vyslovit smysluplná tvrzení a popisy v situacích , které můžeme opakovat ZHRUBA za stejných podmínek, za kterých se staly dříve – např. měření jisté fyzikální veličiny (měření elektrického proudu, měření doby do poruchy zařízení), měření jisté sociologické veličiny (inteligenční kvocient populace, emocionální kvocient populace, různé další parametry schopností člověka), měření vlastností zvířat, rostlin, atd., A POUŽÍT TENTO MATEMATICKÝ POPIS JAKO PREDIKCI (= PŘEDPOVĚĎ) PRO ANALOGICKÉ SITUACE, KTERÉ SE VYSKYTNOU V BUDOUCNU.

Ještě je možná užitečné říci, že v matematickém pojetí se pravděpodobnost zabývá popisem jistého experimentu – respektive popisem měření veličin, které jsou součástí či výsledkem experimentu. Z tohoto pohledu budeme dále používat označení

- **Ω = množina všech možných výsledků experimentu.**

- **X = náhodná veličina (z historického důvodu veličiny v teorii pravděpodobnosti označujeme nikoli malým, ale velkým písmenem).**

Množinu Ω lze tedy chápat jako množinu všech možných výsledků měření veličiny X.

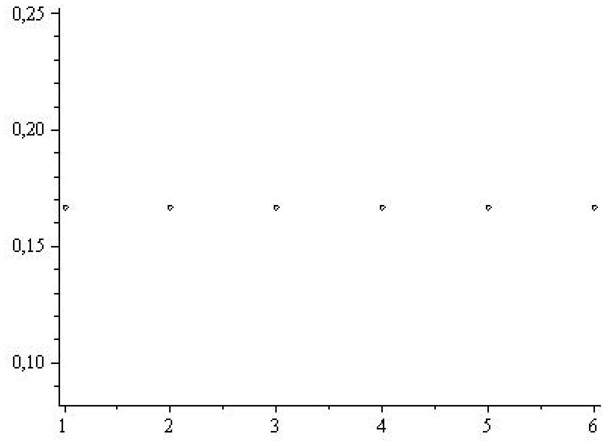
7.1 Diskrétní pravděpodobnostní modely

Příklad 7.1. Veličina X udává, jaké číslo padne na kostce. Jak lze tuto veličinu matematicky popsat? Vypočtěte pravděpodobnost matematického jevu A= na kostce padne číslo větší než 4.

Tuto veličinu můžeme popsat pravděpodobnostní funkcí pravděpodobnosti Hustota rozdělení pravděpodobnosti je dána vztahem

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \dots \textbf{ pro } x \in \{1,2,3,4,5,6\}; \\ 0 & \dots \textbf{ jinak}; \end{cases}$$

jejíž graf je na obrázku:



Není to žádný světoborný matematický popis, ale jedná se o <u>diskrétní rovnoměrné rozdělení</u> pravděpodobnosti, kdy všechny výsledky experimentu nastávají se stejnou pravděpodobností (v případě, že kostka je normálně vyvážena).

Jedná se o nejjednodušší pravděpodobnostní model, který označujeme také jako klasická pravděpodobnost, kdy lze při výpočtu užít vzorce

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \tag{1}$$

(čti: pravděpodobnost jevu A se rovná podílu počtu prvků množiny A a počtu prvků množiny Ω).

V našem příkladu $A = \{5, 6\}$, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tj.

$$P(A) = \frac{2}{6} = 0{,}3333.$$

Tento klasický vzorec lze užít jen tehdy, když Ω je konečná a všechny výsledky z množiny Ω nastávají se stejnou pravděpodobností.

Příklad 7.2. **Veličina X udává, kolikrát při pěti hodech kostkou padne šestka. Jak lze tuto veličinu matematicky popsat? Vypočtěte pravděpodobnost matematického jevu A= třikrát, čtyřikrát či pětkrát při těchto pěti hodech padne šestka.**

Řešení: nyní $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, ovšem výpočet nebude tak jednoduchý, protože jednotlivé výsledky nenastávají se stejnu pravděpodobností. Pokusme se určit, jaká je pravděpodobnostní funkce veličiny X, tj. s jakou pravděpodobností lze naměřit konkrétní hodnoty veličiny X v tomto experimentu.

$X = 0$ **znamená, že při žádném z pěti hodů nepadne šestka;**

$$P(X = 0) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \doteq 0{,}4019$$

($\frac{5}{6}$ **je pravděpodobnost, že šestka nepadne při jednom hodu; pravděpodobnosti jednotlivých nepadnutí šestek mezi sebou násobíme, protože nás zajímá situace všech pěti hodů tak nějak najednou, jako situace, kterou lze popsat jedinou pravděpodobností – počítáme pravděpodobnost průniku pěti jednodušších jevů).**

$X = 1$ **znamená, že při jednom z pěti hodů padne šestka A SOUČASNĚ při ostatních čtyřech hodech šestka nepadne;**

$$P(X=1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+ \\ +\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} \doteq 0{,}4019$$

(jednotlivé součiny pěti nezávislých pravděpodobností se sčítají, protože postihují situace, které se navzájem vylučují: např. situace, kdy při třetím hodu padne šestka a při ostatních hodech nepadne, se vylučuje s tím průběhem experimentu, že šestka padne při čtvrtém hodu a při všech ostatních z pěti hodů nepadne).

$X = 2$ **znamená, že při dvou z pěti hodů šestka padne A SOUČASNĚ při ostatních třech hodech šestka nepadne;**

$$P(X=2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\cdots+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} =$$
$$= \left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot v_{2,5},$$

kde $v_{2,5}$ **představuje počet výběrů dvou pozic házení z pěti, při kterých padne šestka. Tento počet je přesně vyjádřen kombinačním číslem**

$$\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$$

(počet výběrů všech různých dvouprvkových pod-

množin z pěti prvků). Tedy

$$P(X=2)=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\binom{5}{2}=0{,}1608.$$

Dále

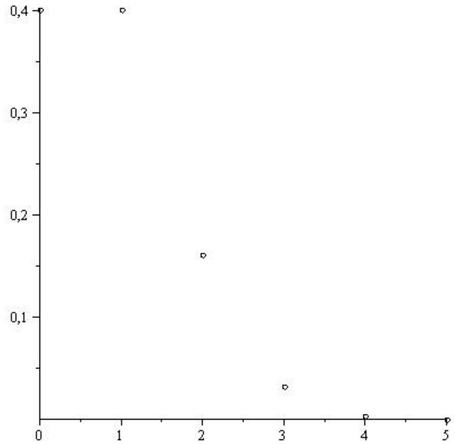
$$\begin{aligned}
P(X=3) &= \left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\binom{5}{3}=0{,}0321;\\
P(X=4) &= \left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1\cdot\binom{5}{4}=0{,}00321;\\
P(X=5) &= \left(\frac{1}{6}\right)^5=0{,}0001.
\end{aligned}$$

Důležitá kontrola tohoto diskrétního rozdělení: po-

kud jsme počítali dobře, tak platí

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = 1.$$

Uvedenou pravděpodobnostní funkci lze vynést do grafu



Nyní můžeme odpovědět na otázku ze zadání příkladu:

$P(X > 2) = p(3)+p(4)+p(5) = 0{,}0321+0{,}0032+0{,}0001 = 0{,}0354.$

Obecně řečeno, pro pravděpodobnost diskrétního rozdělení platí vzorec

$$P(X \in A) = \sum_{k \in A} p(k) \tag{2}$$

(protože jednotlivé pravděpodobnosti prvků množiny Ω **jsou různé, musíme je přímo vyčíslit a sečíst). Tímto způsobem se počítá diskrétní pravděpodobnost. Může se dokonce teoreticky stát, že počet prvků množiny** Ω **je**

nekonečný, ale neustále musí vzorec

$$\sum_{k\in\Omega} p(k) = 1.$$

Je jasné, že klasická pravděpodobnost (z příkladu 1) je speciálním případem diskrétní pravděpodobnosti (z příkladu 2), jinými slovy diskrétní pravděpodobnost je zobecněním pojmu klasická pravděpodobnost.

Třetím příkladem bude příklad 9.12 ze skript [1]:

Příklad 7.3. **Pravděpodobnost, že zařízení pracuje celý den bez poruchy, je rovna $\frac{1}{5}$. Tato pravděpodobnost je stejná každý den a nezávisí na tom, zda ve dnech předchozích došlo k poruše nebo ne. Náhodná veličina X udává počet dnů nutný k tomu, aby nastala první porucha (sleduje tedy spolehlivost zařízení - hodnoty veličiny X snížené o jedničku nám říkají, kolik dnů zařízení pracovalo bez poruchy).**

a) **Určete rozdělení veličiny X (tj. určete elementární jevy ω_i a jejich pravděpodobnosti $P(\omega_i)$).**

b) **Vypočtěte pravděpodobnost, že k poruše zařízení nedojde prvních pět dní jeho provozu.**

Řešení: ad a) Nejnižší možná hodnota veličiny X, kterou můžeme naměřit, je rovna

$$P(X = 1) = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

(uvedenou rovnost čteme: pravděpodobnost, že X nabude hodnoty 1, je rovna $0{,}8$).

Dále může veličina X nabýt hodnoty 2 – a to tehdy, když první den nedojde k poruše (to nastane s pravděpodobností $\frac{1}{5}$), ale druhý den ano:

$$P(X = 2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 0{,}16.$$

Samozřejmě se také může stát, že naměříme hod-

notu $X = 3$, a sice

$$P(X = 3) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 0{,}032.$$

Teoreticky je prostě možné, že veličina X nabude jakékoli přirozené hodnoty k, a sice s pravděpodobností

$$P(X = k) = \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{5}}_{\textbf{(k-1) krát}} \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{4}{5}.$$

Například pravděpodobnost, že veličina X nabude hodnoty 100 (tj. k první poruše dojde až po 100 dnech provozu) je sice hodně malá ($P(X = 100) = 6{,}3 \cdot 10^{-70}$), ale stále ještě různá od nuly.

Ad b) Máme určit pravděpodobnost, že k poruše dojde nejdříve šestý den od zahájení provozu. To znamená, že k první poruše může dojít šestý den, sedmý den, osmý den nebo kdykoliv později. Hledaná pravděpodobnost se tedy rovná

$$P(X > 5) = p(6) + p(7) + p(8) + \cdots,$$

zkrátka a dobře se jedná o součet nekonečné řady. Nekonečnou řadu někdy není snadné sečíst – to potvrdí každý, kdo se o to někdy pokoušel. Ale v našem případě využijeme faktu, že součet všech nenulových hodnot pravděpodobnostní funkce je roven jedné, a místo sečítání nekonečné řady odečteme od hodnoty 1 **pravděpodobnosti těch elementárních jevů, které v**

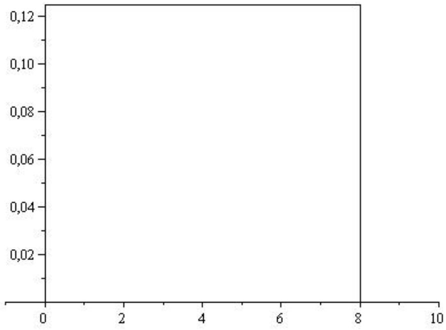
této řadě nejsou obsaženy:

$$
\begin{aligned}
p &= \sum_{k=6}^{\infty} p(k) = 1 - \sum_{k=1}^{5} p(k) = \\
&= 1 - (0{,}8 + 0{,}16 + 0{,}032 + 0{,}0064 + 0{,}00128) = 0{,}00032.
\end{aligned}
$$

7.2 Spojité pravděpodobnostní modely

Příklad 7.4. Tramvaj číslo 1 jezdí v pracovní době i studijní době v pravidelných osmiminutových intervalech. Student Josef přichází na svou zastávku naprosto náhodně, nedívá se do jizdního řádu ani na hodinky. Veličina X = doba jeho čekání na tramvaj. Určete pravděpodobnost, že Josef bude čekat na tramvaj více než pět minut.

U spojitých veličin zavádíme pojem hustota pravděpodobnosti. V tomto příkladu je ovšem hustota pravděpodobnosti velmi jednoduchou funkcí, totiž konstantou na intervalu $\langle 0; 8\rangle$ (v minutách), a nulovou funkcí všude jinde:



Hodnota této nenulové konstanty je $0{,}125$, to aby obsah celého obdélníku pod hustotou pravděpodobnosti byl roven jedné (což musí vždycky platit, aby daná nezáporná funkce modelovala jistou pravděpodobnost).

Nyní bychom odpověď na otázku, s jakou pravděpodobností bude Josef čekat více než pět

minut, našli jako délku úsečky mezi čísly 5 a 8 vydělenou délkou množiny $\Omega = \langle 0; 8 \rangle$**, tj.** $P(A) = \frac{3}{8} = 0{,}375$**.**

Klasická geometrická pravděpodobnost jevu A **je tedy**

$$P(A) = \frac{\textbf{délka množiny } A}{\textbf{délka množiny } \Omega}. \tag{3}$$

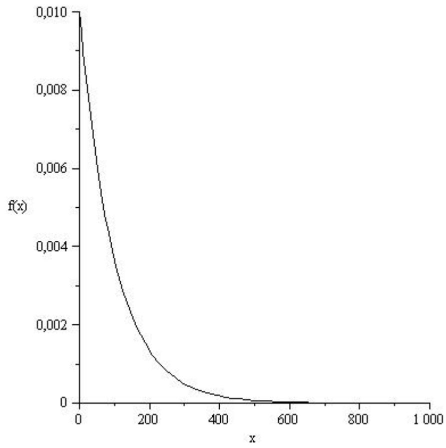
Důležitým předpokladem tohoto vzorce užívajícího geometrickou délku je to, že všechny hodnoty příjezdu tramvaje v intervalu $\langle 0; 8 \rangle$ **jsou stejně pravděpodobné (vzorec lze užít i ve vyšších dimenzích, kdy místo délek jsou obsahy či objemy množin** A **a** Ω **– viz příklad 9.11 ve skriptech [1]).**

Příklad 7.5. Veličina X = životnost žárovky do temné komory. Je známo, že průměrná hodnota veličiny X je 100 hodin provozu žárovky. Rozdělení pravděpodobnosti veličiny X lze popsat hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{pro } x < 0; \\ \frac{1}{100} \cdot e^{-\frac{1}{100}x} & \textbf{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěte pravděpodobnost, že náhodně koupená žárovka bude mít životnost větší než 80 hodin.

Zadanou veličinu lze popsat hustotou pravděpodobnosti na obrázku:



Nyní už nemůžeme počítat jako u klasické geometrické pravděpodobnosti tak, že vydělíme délku úsečky jevu $A = (X > 80)$ celkovou délkou úsečky $\langle 0; \infty \rangle$ – jednak délky těchto úseček jsou nekonečné, takže bychom nic rozumného nezískali, jednak

jednotlivé hodnoty veličiny X **nastávají s různou pravděpodobností. Musíme využít následujícího vztahu pro obecnou spojitou pravděpodobnost:**

$$P(A) = \int_A f(x)\, dx, \tag{4}$$

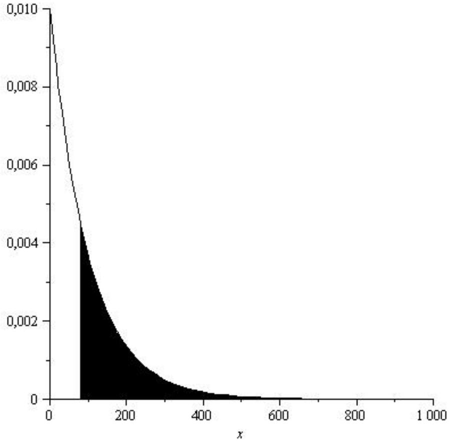
kde $f(x)$ **je hustota pravděpodobnosti veličiny** X**. Aby funkce** $f(x)$ **mohla být hustotou pravděpodobnosti, musí být nezáporná a musí platit** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$**.**

U spojitých veličin lze pravděpodobnost vyjádřit jako obsah jisté plochy. Třeba v našem příkladu je

pravděpodobnost

$$P(X > 80) = \int_{80}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{80}^{\infty} \frac{1}{100} \cdot e^{-\frac{1}{100}x}\,dx = 0{,}4493$$

rovna obsahu šrafované plochy na obrázku:



Na základě porovnání příkladů 2 a 5 vidíme, že existuje velký rozdíl mezi diskrétním a spojitým modelem pravděpodobnosti:

- **U diskrétních veličin existují hodnoty k takové, že $P(X = k)$ je různá od nuly, respektive nachází se v intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ – model pravděpodobnosti je na těchto hodnotách přímo vybudován.**

- **U spojitých veličin pro každé konkrétní $k \in \Omega$ platí: $P(X = k) = \int_k^k f(x)dx = 0$. Plyne to na základě konstrukce pravděpodobnosti jako obsahu jisté plochy. Pravděpodobnost je nyní vybudována na obsazích z funkce zvané hustota pravděpodobnosti. Z toho důvodu může dokonce nastat**

$f(x) > 0$ **pro nějaké** x**, pokud není současně porušen fakt, že** $f(x)$ **je nezáporná a že** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$**.**

Možná se závěrem sluší shrnout nejdůležitější věci z pohledu matematiky u spojitého i u diskrétního modelu pravděpodobnosti. Všimněte si, že v následujících otázkách nebude obsažena definice toho, co je to pravděpodobnost – pravděpodobnost je modelována pravděpodobnostní funkcí či hustotou, jejichž vlastnosti jsou popsány v otázkách 3 a 4:

otázka č. 0 **Co je to** $P(X \in A)$**?**

odpověď: čteme: pravděpodobnost, že veličina X **nabude hodnoty z množiny** A**.**

otázka č. 1**. Kdy nemůžeme** $P(X \in A)$ **počítat podle vzorce klasické pravděpodobnosti?**

odpověď: pokud hodnoty veličiny X **nastávají s různou pravděpodobností**

otázka číslo 2**. Jak poznáme, že veličina** X **je diskrétní, a nikoli spojitá?**

odpověď: u diskrétní veličiny mezi každými dvěma hodnotami, kterých může nabývat, existuje reálné číslo, kterého nabývat nemůže

otázka číslo 3**. Jaké tři věci platí pro diskrétní veličinu** X **a její pravděpodobnostní funkci** $p(x)$**?**
odpověď:

1.

$$P(X \in \langle a;b)) = \sum_{k \in \langle a;b)} p(k);$$

2. $0 \leq p(k) \leq 1$ **pro každé** $k \in \Omega$**;**
3.

$$\sum_{k \in \Omega} p(k) = 1.$$

otázka č. 4**. Jaké tři věci platí pro spojitou veličinu** X **a její hustotu** $f(x)$**?**
Odpověď:

1.

$$P(X \in \langle a; b\rangle) = \int_a^b f(x)dx;$$

2. $f(x) \geq 0$ **pro každé** $x \in R$**;**

3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

otázka č. 5. **Jaké jsou dva velké rozdíly mezi diskrétní a spojitou veličinou?**
Odpověď:

1. $p(x) \leq 1$ **u pravděpodobnostní funkce diskrétní veličiny, kdežto u spojité veličiny pro hustotu pravděpodobnosti může nastat** $f(x) > 1$ **pro některá** x.
2. **U diskrétního modelu nastává** $P(X = x_k) > 0$ **pro** $x_k \in \Omega$,
kdežto u spojitého modelu pro všechna $x_k \in R$ **platí** $P(X = x_k) = 0$.

Literatura

[1] Fajmon, B., Růžičková, I.: Matematika 3. Skriptum FEKT 2003 (identifikační číslo v informačním systému VUT: MAT103).
http://www.rozhovor.cz/souvislosti/matematika3.pdf.

[2] Hlavičková, I., Hliněná, D.: Sbírka úloh z pravděpodobnosti. Skriptum FEKT 2008.

[3] Montgomery, D.C., Runger, G.C.: Applied Statistics and Probability for Engineers. John Wiley and Sons, Inc., New York 2003.