# 6 Obyčejné diferenciální rovnice – řešeny numericky

Břetislav Fajmon, UMAT FEKT, VUT Brno

**Na minulé přednášce jsme viděli některé klasické metody a přístupy pro řešení diferenciálních rovnic: stručně řečeno, rovnice obsahující derivace řešíme analyticky procesem opačným k derivování – integrací. Dnes si představíme některé numerické metody. Ve skriptech [1] je tato kapitola bohatě probrána – v jednom týdnu přednášky a cvičení ovšem stihneme projít jen strany 97-102, dále 111-115, a možná ještě metodu střelby na str. 119-120.**

## 6.1 Počáteční úloha

**Příklad 6.1. Numerickou metodou s krokem $h = 0{,}1$ řešte počáteční úlohu**

$$y' = x^2 - y, \quad y(0) = 1.$$

**Název počáteční úloha pochází z toho, že kromě diferenciální rovnice je zadána počáteční podmínka $y_0 = y(x_0) = y(0) = 1$. Řešením numerické metody se zadaným krokem nyní bude posloupnost přibližných funkčních hodnot**

$$
\begin{aligned}
y_1 &\doteq y(x_1) = y(x_0 + h);\\
y_2 &\doteq y(x_2) = y(x_0 + 2h);\\
&\vdots\\
y_n &\doteq y(x_n) = y(x_0 + nh).
\end{aligned}
$$

**Tuto posloupnost hodnot $y_i$ v bodech $x_i$ nazveme řešením dané počáteční úlohy na intervalu $\langle a; b\rangle = \langle x_0; x_n\rangle$.**

**Vyřešme tuto úlohu třemi metodami – počet metod nemá studenty zahltit, ale jedná se o**

- **A) nejjednodušší možnou numerickou metodu;**
- **dále o B,C) mírné modifikace té nejjednodušší metody, které už dávají výsledky téměř přijatelné v praxi.**

## A) Metoda Eulerova

**Viz skripta, str. 98-99. Tato metoda je nejjednodušší numerická metoda řešící počáteční úlohu prvního řádu, protože vychází z geometrické interpretace rovnice**

$$y' = f(x, y):$$

**sklon funkce** $y$ **v bodě** $x_k$ **je roven funkční hodnotě** $f(x_k, y(x_k))$**, a navíc sklon neznámé funkce** $y$ **v počátečním bodě** $x_0$ **je známý – je zadaný v počáteční podmínce. Pokud tedy sklon** $y'$ **v uvedené rovnici nahradíme přibližně směrnicí sečny k funkci** $y$

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \doteq f(x_i, y(x_i)),$$

**a dále přesné hodnoty $y(x_i)$ nahradíme přibližnými $y_i$, máme vztah**

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \doteq f(x_i, y_i),$$

**odkud plyne vzorec numerické metody**

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \tag{1}$$

**V našem konkrétním příkladu po dosazení funkce v diferenciální rovnici dostáváme vzorec**

$$y_{i+1} = y_i + 0{,}1 \cdot \left(x_i^2 - y_i\right),$$

**přičemž z počáteční podmínky víme, že $y_0 = 1$. Můžeme tedy počítat:**

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 1 + 0{,}1 \cdot \left(0^2 - 1\right) = 0{,}9;\\
y_2 &= 0{,}9 + 0{,}1 \cdot \left(0{,}1^2 - 0{,}9\right) = 0{,}811;\\
y_3 &= 0{,}811 + 0{,}1 \cdot \left(0{,}2^2 - 0{,}811\right) = 0{,}7339;\\
y_4 &= 0{,}7339 + 0{,}1 \cdot \left(0{,}3^2 - 0{,}7339\right) = 0{,}6695;\\
y_5 &= 0{,}6695 + 0{,}1 \cdot \left(0{,}4^2 - 0{,}6695\right) = 0{,}6186;
\end{aligned}
$$

**Uvedený vektor hodnot je výsledkem této numerické metody.**

**Lze porovnat s přesnými hodnotami:** $y(x_1) = 0{,}9052$**,** $y(x_2) = 0{,}8213$**,** $y(x_3) = 0{,}7492$**,** $y(x_4) = 0{,}6897$**,** $y(x_5) = 0{,}6435$**.**

## B) První modifikace Eulerovy metody

**Viz skripta, str. 102. Jedná se jen o jemnou modifikaci předchozí metody s tím rozdílem, že vypočteme bod $y_{i+1}$ pomocí sklonů přibližně odhadnutých ve dvou bodech (viz obr. skripta str. 103):**

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i); \\ k_2 &= f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1); \end{aligned}$$

**pak užijeme vzorec**

$$y_{i+1} = y_i + hk_2. \tag{2}$$

**V našem příkladu po dosazení konkrétní rovnice máme tedy vzorce**

$$
\begin{aligned}
k_1 &= x_i^2 - y_i; \\
k_2 &= \left(x_i + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 - \left(y_i + \frac{0{,}1}{2} \cdot k_1\right); \\
y_{i+1} &= y_i + 0{,}1 \cdot k_2.
\end{aligned}
$$

**To prakticky znamená, že v každém kroku musíme spočítat nejprve dva sklony $k_1$, $k_2$, a pak teprve dosadit do vzorce metody 2:**

$y_0 = 1$ **je zadáno z počáteční podmínky. Dále**

$$
\begin{aligned}
&k_1 = 0^2 - 1 = -1;\\
&k_2 = \left(0 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{0{,}1}{2}\cdot(-1)\right) = -0{,}9475;\\
y_1 \;=\;& 1 + 0{,}1\cdot(-0{,}9475) = 0{,}90525.\\
&k_1 = 0{,}1^2 - 0{,}90525 = -0{,}89525;\\
&k_2 = \left(0{,}1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 - \left(0{,}90525 + \frac{0{,}1}{2}\cdot(-0{,}89525)\right) = -0{,}837\\
y_2 \;=\;& 0{,}90525 + 0{,}1\cdot(-0{,}8379875) = 0{,}82145125.
\end{aligned}
$$

$atd.$

**V porovnání s přesnými hodnotami na str. 7 je tato metoda lepší.**

## C) Druhá modifikace Eulerovy metody

**Viz skripta, str. 102. Jedná se jen o jemnou modifikaci původní Eulerovy metody s tím rozdílem, že vypočteme bod $y_{i+1}$ pomocí sklonů přibližně odhadnutých ve dvou bodech (viz obr. skripta str. 103), a nyní tyto dva sklony volíme jinak než u první modifikace:**

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i); \\ k_2 &= f(x_i + h, y_i + hk_1); \end{aligned}$$

**pak užijeme vzorec**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \tag{3}$$

**(výsledný sklon, v jehož směru hledáme následující bod, vznikne jako aritmetický průměr dvou vypočtených sklonů).**

**V našem příkladu po dosazení konkrétní rovnice máme tedy vzorce**

$$\begin{aligned} k_1 &= x_i^2 - y_i; \\ k_2 &= (x_i + 0{,}1)^2 - (y_i + 0{,}1 \cdot k_1); \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{0{,}1}{2} \cdot (k_1 + k_2). \end{aligned}$$

**To prakticky znamená, že v každém kroku musíme spočítat nejprve dva sklony $k_1$, $k_2$, a pak teprve dosadit do vzorce 3:**

$y_0 = 1$ **je zadáno z počáteční podmínky. Dále**

$$
\begin{aligned}
&k_1 = 0^2 - 1 = -1;\\
&k_2 = (0 + 0{,}1)^2 - (1 + 0{,}1 \cdot (-1)) = -0{,}89;\\
y_1 \;=\; & 1 + \frac{0{,}1}{2} \cdot (-1 - 0{,}89) = 0{,}9055.\\
&k_1 = 0{,}1^2 - 0{,}9055 = -0{,}8955;\\
&k_2 = (0{,}1 + 0{,}1)^2 - (0{,}9055 + 0{,}1 \cdot (-0{,}8955)) = -0{,}77595;\\
y_2 \;=\; & 0{,}9055 + \frac{0{,}1}{2} \cdot (-0{,}8955 - 0{,}77595) = 0{,}8219275.
\end{aligned}
$$

$atd.$

**Přesnost této 2.modifikace je srovnatelná s 1.modifikací.**

## 6.2 Okrajová úloha

**Příklad 6.2.** **Numerickou metodou s krokem** $h = 0{,}25$ **řešte okrajovou úlohu**

$$-y'' + \left(1 + x^2\right) y = x, \qquad y(0) = 1, \qquad y(1) = 2.$$

**Název okrajová úloha pochází z toho, že kromě diferenciální rovnice je zadána počáteční podmínka** $y_0 = y(x_0) = y(0) = 1$**, a dále koncová podmínka určující funkční hodnotu na pravém konci intervalu:** $y_n = y(x_n) = y(1) = 2$**.**

**Uvedeme si dvě metody řešení této úlohy: ta první D) se používá častěji, ta druhá E) dobře dokumentuje kombinaci několika matematických úprav a metod.**

## D) Metoda konečných diferencí

**Ve vyšší dimenzi bývá tato metoda nazývána jako metoda sítí, protože definiční obor se rozdělí na obdélníkovou síť a numerická metoda hledá přibližné řešení v uzlových bodech sítě.**

**Nyní řešená úloha v dimenzi 1 ještě žádnou skutečnou síť neobsahuje, protože pouze rozdělíme interval $\langle a; b\rangle$ s krokem $h$, a dostaneme posloupnost bodů $x_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Numerickým řešením diferenciální rovnice budou přibližné hodnoty $y_i$ neznámé funkce $y$ v těchto bodech.**

**Rozdělme tedy interval $\langle 0; 1\rangle$ s krokem $h = 0{,}25$ na body $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 0{,}75$, $x_4 = 1$.**

**Dále je zadána přesná hodnota na začátku a na konci intervalu: $y_0 = 0$, $y_4 = 1$. Pro každou z neznámých funkčních hodnot $y_1$, $y_2$, $y_3$ upravíme diferenciální rovnici ze zadání tak, aby v ní nevystupovaly derivace – nahradíme derivace v rovnici pomicí vzorce pro numerické derivování: První derivaci (pokud se v rovnici vyskytuje) v bodě $x_i$ nahradíme vztahem**

$$f'(x_i) \doteq \frac{1}{2h}\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right);$$

**druhou derivaci v bodě $x_i$ nahradíme vztahem**

$$f''(x_i) \doteq \frac{1}{h^2}\left(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\right).$$

**Tak dostaneme v každém z bodů $x_1$, $x_2$, $x_3$ jednu lineární rovnici, takže dohromady budeme mít systém tří lineárních rovnic:**

$$\begin{aligned}
i = 1: &\qquad \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{0{,}25^2} - \left(1 + x_1^2\right) \cdot y_1 = -x_1;\\
i = 2: &\qquad \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{0{,}25^2} - \left(1 + x_2^2\right) \cdot y_2 = -x_2;\\
i = 3: &\qquad \frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{0{,}25^2} - \left(1 + x_3^2\right) \cdot y_3 = -x_3.
\end{aligned}$$

**Dosazením do těchto rovnic ($x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 0{,}75$, a dále známe také $y_0 = 0$, $y_4 = 1$) a odstraněním zlomků příslušným násobením dostaneme systém tři lineárních rovnic o třech neznámých**

$$
\begin{aligned}
2{,}06640625y_1 - y_2 &= 1{,}015625;\\
-y_1 + 2{,}078125y_2 - y_3 &= 0{,}03125;\\
-y_2 + 2{,}09765625y_3 &= 2{,}046875,
\end{aligned}
$$

**odkud lze určit řešení (po zaokrouhlení na tři desetinná místa)** $y_1 \doteq 1{,}140$**,** $y_2 \doteq 1{,}341$**,** $y_3 \doteq 1{,}615$**.**

**Pro srovnání, hodnoty přesného řešení jsou (po zaokrouhlení na tři desetinná místa)** $y(x_1) \doteq 1{,}138$**,** $y(x_2) \doteq 1{,}337$**,** $y(x_3) \doteq 1{,}612$**. Kdybychom chtěli dosáhnout větší přesnosti naší numerické metody, museli bychom interval rozdělit jemněji.**

## E) Metoda střelby

**Převeďme nejprve diferenciální rovnici 2.řádu z našeho příkladu na systém dvou diferenciálních rovnic prvního řádu. Označme nejprve $y_1(x) := y(x)$, $y_2(x) := y'(x)$. Tím pádem máme první derivaci neznámé funkce $y$ označenu jako $y_2$, a když nyní dosadíme toto označení za $y''$, dostaneme pouze první derivaci funkce $y_2$ (tedy $y_2' = y''$), takže se snížil řád diferenciální rovnice!! Ovšem díky označení $y_2$ se zvýšil počet neznámých funkcí,**

**a tak místo jedné rovnice druhého řádu**

$$y'' = \left(1 + x^2\right) y - x, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2;$$

**dostaneme systém dvou rovnic prvního řádu:**

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2; \\ y_2' &= \left(1 + x^2\right) y_1 - x \end{aligned}$$

**s neznámými funkcemi** $y_1(x)$**,** $y_2(x)$ **a okrajovými podmínkami** $y_1(0) = 1$**,** $y_1(1) = 2$**.**

**Podobnou úpravu lze vždy provést (viz [1], str. 112) – obyčejnou diferenciální rovnici řádu $n$ lze substitucí za vyšší derivace neznámé funkce $y(x)$ převést na systém $n$ diferenciálních rovnic řádu 1 (= systém, kde se v každé rovnici vyskytuje pouze první derivace, a žádné vyšší derivace zde už nejsou).**

**Ve výsledku nás bude zajímat jen výsledek pro funkci $y_1$, protože $y_1 = y$ označuje původní funkci v rovnici.**

**Nyní můžeme náš systém dvou rovnic prvního řádu**

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2; \\ y_2' &= \left(1 + x^2\right) y_1 - x \end{aligned}$$

**řešit například Eulerovou metodou v dimenzi 2 (viz př. 8.7 na str.111 skript). Máme zde ovšem problém: Eulerova metoda vyžaduje počáteční podmínku pro obě funkce $y_1(x_0)$, $y_2(x_0)$, my ovšem máme k dispozci jen $y_1(0) = 1$, a pro $y_2$ nám počáteční podmínka chybí.**

**Nevadí, pokusíme se počáteční podmínku pro $y_2(x_0)$ „náhodně nastřelit“, a pak tuto „střelbu“ zkorigujeme kontrolou s okrajovou podmínkou pro funkci $y_1(x_n)$, kterou máme ještě k dispozici a Eulerova metoda ji přímo nevyužije.**

**Krok 1: Zkusme zvolit např. $y_2(0) = 1$ a proveďme pro tento odhad počáteční podmínky celou Eulerovu metodu:**

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2; \qquad & y_1(0) = 1; \\ y_2' &= \left(1 + x^2\right) y_1 - x; \quad & y_2(0) = 1; \end{aligned}$$

**Jako výstup Eulerovy metody dostaneme sloupec hodnot $y1_k$ a sloupec $y2_k$ – viz soubor kroky.txt:**

soubor kroky

| x_k | y_1k | y_2k |
|---|---|---|
| 0.00000 | 1.0000000000 | 1.0000000000 |
| 0.25000 | 1.2500000000 | 1.2500000000 |
| 0.50000 | 1.5625000000 | 1.5195312500 |
| 0.75000 | 1.9423828125 | 1.8828125000 |
| 1.00000 | 2.4130859375 | 2.4540557861 |

**Vidíme, že v nalezeném řešení $y1(1) = 2{,}4130859375$, což jsme trochu přestřelili podmínku ze zadání původního příkladu $y1(2) = 2$. Zkusme tedy trochu snížit úhel, pod kterým „vystřelujeme“ funkci $y2$.**

## Krok 2: Eulerovu metodu proveďme pro:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2; & y_1(0) &= 1; \\ y_2' &= \left(1+x^2\right) y_1 - x; & y_2(0) &= 0; \end{aligned}$$

**soubor kroky**

| x_k | y_1k | y_2k |
|---|---|---|
| 0.00000 | 1.0000000000 | 0.0000000000 |
| 0.25000 | 1.0000000000 | 0.2500000000 |
| 0.50000 | 1.0625000000 | 0.4531250000 |
| 0.75000 | 1.1757812500 | 0.6601562500 |
| 1.00000 | 1.3408203125 | 0.9319458008 |

**Nyní $y1(1) = 1{,}3408203125$, takže hodnotu $2$ jsme trochu podstřelili.**

**Nyní víme, že hodnota počáteční podmínky pro funkci $y2$ leží na intervalu $\langle 0; 1\rangle$ a můžeme ji s libovolnou přesností najít například metodou půlení intervalů:**

**Po dalších jedenácti krocích mírné modifikace počáteční podmínky $y2(0) = s$, kde $s$ je vždy střed intervalu získaného v předchozím kroku, dojdeme ke kroku 13:**

## Krok 13: Eulerovu metodu proveďme pro:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2; & y_1(0) &= 1; \\ y_2' &= \left(1+x^2\right) y_1 - x; & y_2(0) &= 0{,}6147460938; \end{aligned}$$

soubor kroky

| x_k | y_1k | y_2k |
|---|---|---|
| 0.00000 | 1.0000000000 | 0.6147460938 |
| 0.25000 | 1.1536865234 | 0.8647460938 |
| 0.50000 | 1.3698730469 | 1.1086940765 |
| 0.75000 | 1.6470465660 | 1.4117794037 |
| 1.00000 | 1.9999914169 | 1.8676569685 |

**Nyní lze vzít sloupec pro $y1$ jako řešení našeho příkladu pro dané $h$ (a ještě všechny hodnoty zaokrouhlit na tři desetinná místa).**

**K samostatnému procvičení: str. 122, příklady 8.1, 8.5, 8.6 (na konci skript najdete řešení).**

## Literatura

[1] **Fajmon, B., Růžičková, I.: Matematika 3. Skriptum FEKT VUT v elektronické formě, Brno 2003. Počet stran 257 (identifikační číslo v informačním systému VUT: MAT103).** http://www.rozhovor.cz/souvislosti/matematika3.pdf.