5 Obyčejné diferenciální rovnice

Břetislav Fajmon, UMAT FEKT, VUT Brno

Téma je úvodním pohledem na řešení diferenciálních rovnic – pohled na klasické metody, které ve skriptech [1] nejsou probírány (mírný úvod s vysvětlením některých pojmů lze nalézt v textu [2], strany 14-32).

5.1 Sestavení diferenciální rovnice

Jedním z klíčových průkopníků při rozboru pojmu funkce byl Isaac Newton (1642-1727):

Newton matematickými vzorci popsal velké množství konkrétních jevů: pro mořský příliv a odliv, dráhy komet, precesi bodů rovnodennosti, atd. Snad jeho největším vynálezem OVŠEM BYL infinitezimální počet = metoda měření a popisu nepřetržitého pohybu (= práce se spojitými funkcemi jedné reálné proměnné). Protože <u>každý spojitý pohyb</u>, ať už pohyb padajícího tělesa, elektrický proud či chladnutí roztavené hmoty, <u>lze zobrazit křivkou</u>, ukoval nástroj, jímž mohl útočit, a to nejen na

výpočty, ale i na přírodní procesy. Jak to vyjádřil historik Randall, „svým vynálezem infinitezimálního počtu Newton vykoval poslední článek v matematickém výkladu přírody“. Spojitou funkcí lze popsat nejen přesné matematické dráhy pohybu, ale i různé proměnlivé procesy a děje.

Důležité na tomto popisu spojitých procesů je to, že funkce popisující tyto spojité děje byly nalézány jako řešení jistých rovnic, které se nazývají diferenciální.

Příklad 5.1. Rovnice jaderné přeměny. Odvoďme rovnici popisující přeměnu radioaktivní látky v závislosti na čase.

Označme

- $x(t)$ ... **hmotnost radioaktivní látky (v gramech) v čase** t**;**
- $x(t+\tau)$ ... **hmotnost radioaktivní látky (v gramech) v čase** $t+\tau$ **(tato hodnota je menší než** $x(t)$**, protože radioaktivní látky v čase ubývá);**
- $\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau}$ ... **průměrné množství přeměněné látky za jednotku času (= průměrná rychlost změny veličiny** $x(t)$**);**

Nyní lze vyslovit velmi jednoduchý model popisující úbytek množství radioaktivní látky v čase:

Průměrná rychlost změny veličiny x v intervalu $\langle t; t+\tau\rangle$ je přímo úměrná hodnotě $x(t)$ na počátku tohoto intervalu. Tuto větu lze vyjádřit rovnicí

$$\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} = konst \cdot x(t). \tag{1}$$

Dále protože veličiny x ubývá, levá strana rovnice (1) je záporná – tedy rovnici lze psát ve tvaru

$$\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} = -\lambda \cdot x(t), \tag{2}$$

kde λ je číslo kladné – toto číslo λ se nazývá přeměnová konstanta příslušné radioaktivní látky.

Limitním procesem pro $\tau \to 0$ nyní dostaneme z rovnice (2) rovnici diferenciální:

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau} = x'(t) \;=\; -\lambda \cdot x(t) \tag{3}$$

(uvedená limita je přesně definičním vztahem pro první derivaci funkce $x(t)$).

Interpretace rovnice: okamžitá rychlost změny veličiny $x(t)$ je přímo úměrná množství této veličiny v čase t.

Podívejme se na využití tohoto jednoduchého modelu rovnice (3) v konkrétní situaci:

Příklad 5.2. Ve vykopávkách babylonského města Nippuru bylo roku 1950 zjištěno, že v jednom gramu dřeva z ohořelých střešních trámů se za jednu minutu přeměnilo průměrně $3{,}84$ atomů izotopu uhlíku C^{14}. V živém dřevě se přeměňuje v jednom gramu $6{,}08$ atomů za minutu. Předpokládáme-li, že trámy ohořely v době Chammurabiho vlády, odhadněte, kdy přibližně tento panovník žil (hodnotu konstanty λ určete z faktu, že poločas rozpadu izotopu uhlíku C^{14} je 5568 let).

Řešení:

A) Najdeme nejprve tzv. obecné řešení rovnice (3): Nejprve vyjádříme derivaci podle zápisu $\frac{dx}{dt}$, pak převedeme vše s proměnnou x na jednu stranu rovnice, a obě strany rovnice zintegrujeme:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\lambda \cdot x; \\
\frac{dx}{x} &= -\lambda \cdot dt; \\
\int \frac{dx}{x} &= -\lambda \int dt; \\
\ln|x| &= -\lambda \cdot t + c; \\
|x| &= e^{-\lambda t + c} = e^{c} \cdot e^{-\lambda t}; \\
x &= \pm e^{c} \cdot e^{-\lambda t};
\end{aligned}
$$

Pokud označíme $\pm e^c$ konstantou k, můžeme psát řešení diferenciální rovnice 3 ve tvaru

$$x(t) = k \cdot e^{-\lambda t}. \tag{4}$$

Odvodili jsme model průběhu množství radioaktivní veličiny v závislosti na čase!!! Při tomto odvození došlo k několika významným historickým skutečnostem:

- **Při integraci jednoduché funkce $\frac{1}{x}$ (tzv. nepřímá úměrnost) jsme dostali funkci $\ln|x|$ – to je místo, kde se tato funkce poprvé ve studiu matematiky na VŠ objevuje!!! Tedy funkce $y = \ln x$ je získána jako výsledek integrace velmi jednoduché funkce $\frac{1}{x}$.**

- **Výsledkem řešení diferenciální rovnice 3 je funkce inverzní k funkci $\ln x$, a sice exponenciální funkce!!! To je důvod, proč se v matematice objevují exponenciální funkce – objevují se jako řešení některých jednoduchých diferenciálních rovnic: tj. exponenciální funkce je příkladem modelu závislosti rychlosti změny veličiny na čase (obyčejně je v těchto modelech záporná mocnina, takže pro rostoucí t se hodnoty $e^{-\lambda t}$ blíží k nule).**

B) Nyní najdeme hodnotu přeměnové konstanty λ: Pro $t = o$ má řešení hodnotu $x(0) = k \cdot e^0 = k$, tj. konstanta k udává množství látky v čase $t = 0$. Poločas rozpadu znamená dobu, za kterou je množství ubývající látky rovno $\frac{k}{2}$. Měla by tedy platit rovnice (kterou získáme dosazením do (4))

$$\frac{k}{2} = k \cdot e^{-\lambda \cdot 5568},$$

odtud

$$\frac{-1}{5568} \cdot \ln \frac{1}{2} = \lambda \Rightarrow \lambda \doteq 0{,}00012449$$

(čili λ lze určit, aniž bychom znali hodnotu k počátečního množství).

C) Zbývá odpovědět na otázku, jak staré je ohořelé dřevo: Uvážíme zde, že podíl rychlostí $\frac{R(t)}{R_0}$ **změny dnes a kdysi je vlastně roven podílu** $\frac{x(t)}{x(0)}$ **množství látky dnes a kdysi, dostáváme rovnost, kde za** $x(t)$ **a** $x(0)$ **dosadíme naše řešení (4) s právě vypočtenou hodnotou** λ**:**

$$\frac{3{,}84}{6{,}08} = \frac{R(t)}{R_0} = \frac{x(t)}{x(0)} = \frac{ke^{-0{,}00012449 \cdot t}}{k} = e^{-0{,}00012449 \cdot t},$$

odtud časový interval

$$t = \frac{-1}{0{,}00012449} \cdot \ln\left(\frac{3{,}84}{6{,}08}\right) \doteq 3690 \textbf{ let},$$

a protože interval měření končí v roce 1950, tak započal v roce $1950 - 3690 = 1740$ **let před naším letopočtem.**

Poznámky k tomuto modelu určování stáří:

- **Tato technika určování stáří nálezů je velmi cenná pro archeology, má ovšem svá omezení – může být použita pouze pro dobu kratší než 30 000 let, jinak je množství izotopu C^{14} v nálezech příliš malé k tomu, aby bylo možné určit z něho přesné výsledky (hmotnost jedné částice musí být zanedbatelně malá vzhledem k celkové hmotnosti látky).**

- **Tam, kde nejsou k dispozici živé organizmy, využívá se k odhadu jejich věku stáří hornin, ve kterých se nachází. A i zde musí být naše závěry opatrné: pokud máme schopnost změřit úbytek látky v hornině v dnešní době, to neznamená že kdysi před mnoha lety, v době blízké vzniku horniny, byly podmínky pro úbytek množství látky přibližně stejné (kdysi mohly být podmínky pro úbytek látek jiné, takže je možné, že zjišťování stáří čehokoliv, kdy odhadujeme více než třicet tisíc let, je pomýlené).**

RNDr. Vladimír Král, CSc., pracovník akademie věd, ve své knize Život – náhoda nebo záměr? (nakl. Adventure, 1991), zejména str. 51-57, upozorňuje na omezenou výpovědní sílu radiometrického datování.

Např. citát ze str. 54:

V roce 1970 byla testována spolehlivost metody rozpadu uran-olovo pro řadu vulkanických hornin. Jednalo se o lokality na Azorských ostrovech a na Vesuvu. zjištěný věk se pohyboval od 100 miliónů do 10,5 miliardy let. to by ještě nebylo nic šokujícího, pokud ovšem uvážíme, že tyto útvary prokazatelně vznikly před několika sty lety, dostává celá situace nový rozměr. Podívejme se nyní na několik dalších případů datování hornin, jejichž věk byl znám. Havajský institut geofyziky popsal v roce 1968 stanovení stáří lávy, o níž byly potvrzené zprávy, že láva ztuhla

před 200 lety. Draslík-argonovou metodou bylo zjištěno stáří 22 milionů let. Podobně moderní horniny formované na Havaji na počátku 19.století byly datovány stejnou metodou v rozmezí 160 milionů až tři miliardy let.

Když tři sta let stará hornina je odhadnutá na stáří dvou miliard let, můžeme tomuto matematickému modelu měření věřit, že dobře popisuje skutečnost?

Příklad 5.3. Diferenciální rovnice v elektrickém obvodu. Sestavme rovnici popisující závislost proudu v jednoduchém elektrickém obvodu na čase.

V uzavřeném obvodu je sériově zapojen rezistor o konstantním odporu R, kondenzátor s konstantní kapacitou C a cívka o konstantní indukčnosti L, a též zdroj proměnného napětí (obvykle $u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$). Další veličinou je náboj na kondenzátoru $q(t)$. Mezi nábojem a proudem platí vztah $i(t) = \frac{dq}{dt}$.

Pro tento obvod platí druhý Kirchhoffův zákon: v uzavřeném obvodu je napětí $u(t)$ rovno součtu úbytků napětí na jednotlivých prvcích obvodu. Součtem úbytku napětí na cívce, na rezistoru a na

kondenzátoru dostaneme diferenciální rovnici

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t) \cdot R + \frac{q(t)}{C}. \tag{5}$$

Vzhledem k tomu, že $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$**, lze rovnici (5) psát ve tvaru (pro zápis derivace užijme symbolu „′“)**

$$u(t) = L \cdot q'' + R \cdot q' + \frac{1}{C} \cdot q(t), \tag{6}$$

což je vzhledem k funkci $q(t)$ **diferenciální rovnice druhého řádu (protože obsahuje druhou derivaci funkce** $q(t)$**).**

Pokud funkce $u(t)$ má spojitou derivaci, můžeme její derivací odvodit zpět z rovnice (5) diferenciální rovnici druhého řádu pro proudovou funkci $i(t)$: derivací (5) podle t dostaneme

$$u' = L \cdot i'' + R \cdot i' + \frac{1}{C} \cdot i$$

(diferenciální rovnice druhého řádu vzhledem k funkci $i(t)$).

5.2 Některé klasické = analytické metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic

Uveďme nyní dvě metody řešení některých jednoduchých typů rovnic prvního řádu (tj. neznámá funkce se v diferenciální rovnici vyskytuje v první derivaci):

A) Obyčejné diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými

Jedná se o rovnice typu

$$y'(t) = f(y) \cdot g(t).$$

Rovnici tohoto typu jsme vlastně řešili už v předchozím oddílku (rovnice jaderné přeměny): tyto rov-

nice mají na levé straně jen y', a na pravé straně součin funkce proměnné y a funkce proměnné t (nebo je lze do tohoto tvaru upravit): řešíme je tak, že y' nahradíme jako $\frac{dy}{dt}$, převedeme na jednu stranu rovnice všechny výrazy s neznámou y, na druhou stranu všechny výrazy s neznámou t, a pak obě strany zintegrujeme.

Příklad 5.4. Nalezněte řešení počáteční úlohy

$$y' = y^2 \cdot \sin t, \qquad y(0) = 1.$$

Řešení: Najdeme nejprve obecné řešení rovnice $y' = y^2 \sin t$:

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \cdot \sin t;$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \sin t dt;$$
$$\frac{-1}{y} = -\cos t + k.$$

Odtud obecné řešení je tvaru

$$y = \frac{1}{\cos t - k},$$

kde k **je zatím neurčená reálná konstanta. Konstantu** k **určíme z počáteční podmínky** $y(1) = 0$**: dosazením** $t = 1$ **do našeho obecného řešení dostaneme** **partikulární řešení** **(= jediné řešení, které vyhovuje počáteční podmínce ze zadání):**

$$\frac{1}{\cos 0 - k} = 1 \Rightarrow k = 0.$$

Řešením naší úlohy je tedy funkce

$$y = \frac{1}{\cos t}.$$

Příklad 5.5. Sami si můžete procvičit: Nalezněte řešení počáteční úlohy

$$y \cdot y' = \frac{e^t}{1 + e^t}; \qquad y(0) = 0.$$

Řešení: Po substituci na pravé straně rovnice $1 + e^t = x$, $e^t dt = dx$ zintegrujeme

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^t) + c.$$

Pokud konstantu c rozepíšeme jako $c = \ln k$, můžeme součet logaritmů vyjádřit jako logaritmus součinu:

$$\frac{y^2}{2} = \ln\left[k(1 + e^t)\right].$$

Zde po dosazení počáteční podmínky ze zadání určíme $k = \frac{1}{2}$, tedy celkem

$$y(t) = \sqrt{2 \cdot \ln \frac{1 + e^t}{2}}.$$

B) Lineární diferenciální rovnice 1.řádu Jedná se o rovnice typu

$$y'(t) + f(t) \cdot y(t) = g(t).$$

Tato rovnice je lineární vzhledem k proměnné y, protože ta se v ní vyskytuje pouze v první mocnině. Pro následující postup je potřeba, aby se jednal o přesně tento tvar rovnice, eventuelně rovnice byla do tohoto tvaru upravitelná.

Klíčová metoda řešení se nazývá metoda variace konstanty a bude vysvětlena na konkrétním příkladu:

Příklad 5.6. Nalezněte řešení počáteční úlohy

$$y' - 2ty = t, \qquad y(0) = 1.$$

Řešení: nejprve zkontrolujeme, že se skutečně jedná o rovnici typu $y'(t) + f(t) \cdot y(t) = g(t)$**. Pak**

a) vyřešíme nejprve rovnici, kde na pravé straně nebude funkce $g(t) = t$**, ale bude tam nula (= tzv. homogenní rovnice): Tuto rovnici** $y' - 2ty = 0$ **dovedeme řešit, protože vynulováním pravé strany jsme dostali rovnici se separovatelnými proměnnými:**

$$\frac{dy}{dt} = 2ty;$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= 2\int t\,dt;\\
\ln|y| &= t^2 + c;\\
|y| &= e^{t^2+c};\\
y &= \pm e^c \cdot e^{t^2}.
\end{aligned}
$$

Nyní přeznačením konstanty $k := \pm e^c$ dostaneme

$$y_h = k \cdot e^{t^2}$$

(přidání indexu h naznačuje, že ještě nejsme u konce – zatím jsme našli pouze řešení tzv. „homogenní“ rovnice).

b) Najdeme nyní nějaké jedno řešení rovnice s nenulovou pravou stranou metodou variace konstant: vezmeme y_h **a konstantu** k **v něm „zvariujeme" na funkci** $k(t)$ **– dostáváme tzv. partikulární řešení (= konkrétní řešení původní zadané rovnice)**

$$y_p = k(t) \cdot e^{t^2}.$$

Funkci $k(t)$ **ještě ovšem musíme určit dosazením** y_p **místo** y **a** y_p' **místo** y' **do původní rovnice: pozor, derivujeme jako součin:** $y_p' = k'(t) \cdot e^{t^2} + k(t) \cdot e^{t^2} \cdot 2t$**.**

Do původní rovnice

$$y' - 2ty = t$$

nyní dosadíme:

$$k'(t) \cdot e^{t^2} + k(t) \cdot e^{t^2} \cdot 2t - 2t \cdot k(t) \cdot e^{t^2} = t.$$

Pokud jsme počítali dobře, člen, kde se vyskytuje $k(t)$, se vždy v rovnici odečte a zůstane jen člen, kde se vyskytuje $k'(t)$:

$$\begin{aligned} k'(t) \cdot e^{t^2} &= t; \\ k'(t) &= e^{-t^2} \cdot t; \\ k(t) &= \int e^{-t^2} \cdot t dt = \frac{-1}{2} e^{-t^2} \end{aligned}$$

po substituci $x = -t^2$**,** $dx = -2tdt$**. Našli jsme** $k(t)$**, čili**

$$y_p = \frac{-1}{2} e^{-t^2} \cdot e^{t^2} = \frac{-1}{2}.$$

Všimněte si, že y_p **už při integraci nedodá konstantu, protože nás nezajímají všechna řešení, ale jen jedno řešení. Nyní celkové <u>obecné řešení</u> naší úlohy je dáno součtem**

$$y = y_h + y_p = k \cdot e^{t^2} - \frac{1}{2};$$

toto řešení ještě obsahuje konstantu k**, kterou určíme z počáteční podmínky:**

$$y(0) = 1 : \quad k - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{2}.$$

Naprostá odpověď v našem příkladu: hledaná funkce má tvar

$$y = \frac{3}{2} \cdot e^{t^2} - \frac{1}{2}.$$

Příklad 5.7. Sami si můžete procvičit: Nalezněte řešení (pro $t > 0$) počáteční úlohy

$$y' + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2}; \qquad y(\pi) = 0.$$

Řešení: a) hledejte y_h jako řešení homogenní rovnice $y' + \frac{2}{t}y = 0$;
b) „Zvariujte" konstantu k v y_h na funkci $k(t)$, celou takto pozměněnou y_h označte jako y_p a dosaďte za y

do původní rovnice. Integrací vypočtěte funkci $k(t)$, nyní $y = y_h + y_p$;
c) y stále ještě obsahuje původní konstantu k. Pokud není zadána počáteční podmínka, tato konstanta se už neurčuje a máme tzv. obecné řešení. Pokud počáteční podmínka zadána je (jako v našem příkladu), dosadíme ji do výrazu pro y a určíme k. Výsledné y pak už neobsahuje žádnou konstantu a nazývá se partikulární řešení[1].

Výsledek v našem příkladu:

$$y = \frac{\sin t}{t^2}.$$

[1] Všimněte si kolize pojmů – pod partikulárním řešením označujeme jak y_p, tak výsledné y s určenou konstantou; obecně lze říci, že partikulární řešení označuje řešení konkrétní, ve kterém nevystupují žádné konstanty.

Existují ještě další klasické = analytické metody pro některé speciální případy rovnice prvního řádu, druhého řádu i vyšších řádů (řád rovnice říká, jaká maximální derivace neznámé funkce se v ní vyskytuje).

V celé této přednášce byla řeč jen o tzv. <u>obyčejných</u> diferenciálních rovnicích – v nich se vyskytuje jen jedna neznámá proměnná. rovnice, ve kterých vystupují funkce dvou a více proměnných včetně jejich derivací, označujeme jako <u>parciální</u> diferenciální rovnice (podle parciálních derivací).

Literatura

[1] **Fajmon, B., Růžičková, I.: Matematika 3. Skriptum FEKT VUT v elektronické formě, Brno 2003. Počet stran 257 (identifikační číslo v informačním systému VUT: MAT103).** `http://www.rozhovor.cz/souvislosti/matematika3.pdf`.

[2] **Kolářová, E.: Matematika 2 – sbírka příkladů. Skriptum FEKT VUT v elektronické formě, Brno 2007. Odkaz:** `www.umat.feec.vutbr.cz/~kolara/bmadvanovaverze.pdf`.