# 2 Interpolační polynom a splajn

Břetislav Fajmon, UMAT FEKT, VUT Brno

**Téma je podrobně zpracováno ve skriptech [1], kapitola 6.**

**Základní aproximační úlohu lze popsat následovně:**

**Jsou dány body** $[x_0, y_0]$**,** $[x_1, y_1]$**, . . .,** $[x_n, y_n]$ **(získány většinou z měření vztahu mezi dvěma veličinami, měření jedné veličiny v čase, atp.). Naším úkolem je najít v jistém smyslu nejvhodnější funkci, která tyto naměřené hodnoty aproximuje (= modeluje, blíží se jim).**

**Různé typy aproximace (latinské aproximare = přiblížit se):**

a) **Interpolační polynom.** Bodů měření je malý počet, měření je přesné (není zatíženo chybou). Chceme, aby hledaná aproximační funkce procházela danými body.

b) **Splajn.** Bodů měření je větší počet, měření je přesné (není zatíženo chybou). Chceme, aby hledaná aproximační funkce procházela danými body.

c) **Metoda nejmenších čtverců.** Bodů měření je větší počet (může být i více bodů se stejnou souřadnicí $x_i$), měření je zatíženo chybou (počítáme s nepřesnostmi způsobenými měřením). Hledaná funkce nemusí procházet danými body.

**V případech a), b) potřebujeme hledat funkci, která zadanými body přesně prochází. Příkladem je např.**

- **modelování kosti ve 3D (výroba umělého kloubu); potřebujeme nalézt funkci, která naměřenými body přesně prochází, jak jen jsme schopni tuto přesnost změřit, aby umělý kloub bylo možné přesně voperovat.**

- **modelování povrchu pneumatiky; zajímá nás opět přesný popis, výstupky i odvodňovací kanálky při mokré vozovce musí být na pneumatice popsány přesně podle návrhu, aby byly zachovány fyzikální vlastnosti pneumatiky.**

**Poznámka 2.1. A) Interpolační polynom.**

**Pro** $(n+1)$ **zadaných bodů** $[x_0, y_0]$**,** $[x_1, y_1]$**, . . .,** $[x_n, y_n]$ **je interpolační polynom řádu** $n$ **polynomem stupně nejvýše** $n$**, který zadanými body prochází, tj. platí** $P_n(x_i) = y_i$**.**

**Pro** $n = 1$ **jsou dány body** $[x_0, y_0]$**,** $[x_1, y_1]$**, a interpolačním polynomem řádu 1 je lineární funkce, jejímž grafem je přímka, která těmito dvěma body prochází.**

**Pro** $n = 2$ **jsou dány body** $[x_0, y_0]$**,** $[x_1, y_1]$**,** $[x_2, y_2]$ **a interpolačním polynomem řádu 2 je funkce ve tvaru** $P_2(x) = ax^2 + bx + c$**, jejímž grafem je (zpravidla) parabola, která těmito třemi body prochází.**

**Vysvětlení pojmu <u>řád interpolečního polynomu</u>: Pokud zadané tři body leží na přímce, tak při hledání koeficientů funkce $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ dostaneme $a = 0$, tj. interpolační polynomu řádu 2 v některých případech je polynomem stupně 1 – tj. řád interpolačního polynomu udává maximální možný stupeň hledaného polynomu (může se stát v konkrétních případech, že stupeň interpolačního polynomu je nižší než jeho řád (proto tedy zavádíme pojem řád interpolačního polynomu)).**

**Věnujme se situaci obecného $n > 2$ – hledáme polynom, který prochází zadanými body $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, . . ., $[x_n, y_n]$:**

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

**Protože pro $(n+1)$ neznámých koeficientů máme $(n+1)$ rovnic**
**$P_n(x_i) = y_i$, interpolační polynom za předpokladu**

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

**vždy existuje a je určen jednoznačně. Jde jen o to jej rychle najít. Lze určitě dosadit do rovnic $P_n(x_i) = y_i$ konkrétní zadané body a hledat řešení daného systému rovnic, ale existují některé rychlejší postupy:**

**1) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu. Celý polynom okamžitě sestavíme dosazením do vzorce**

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \\
&\quad + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \cdots \\
&\quad \cdots + y_n \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}
\end{aligned}
$$

**Zlomky v tomto vzorci jsou zkonstruovány tak, aby po dosazení konkrétní hodnoty $x_i$ byly všechny rovny nule kromě $i$-tého zlomku, který je roven jedné (čili prakticky už z konstrukce zlomků je hned zřejmé, že $P_n(x_i) = y_i$).**

**Je dobré mít na mysli, že zlomků je stejný počet jako je zadaných bodů, tj. $(n + 1)$.**

**Příklad 2.1.** **Najděte interpolační polynom daný body**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -1 | 0 | 2 | 4 |
| $y_i$ | 2 | 4 | 3 | -1 |

.

**Řešení:**

$$\begin{aligned} P_3(x) \; = \; & 2 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(-1-0)(-1-2)(-1-4)} + \\ & +4 \cdot \frac{(x-(-1))(x-2)(x-4)}{(0-(-1))(0-2)(0-4)} + \\ & +3 \cdot \frac{(x-(-1))(x-0)(x-4)}{(2-(-1))(2-0)(2-4)} - \\ & - \frac{(x-(-1))(x-0)(x-2)}{(4-(-1))(4-0)(4-2)}. \end{aligned}$$

**Uvedený interpolační polynom bychom mohli dále zjednodušit, například roznásobením konstant ve jmenovateli, roznásobením závorek v čitateli, apod.**

## 2) Newtonův tvar interpolačního polynomu.

**Celý polynom v Newtonově tvaru lze psát**

$P_n(x) = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}),$

**kde vypočítat koeficienty** $a_i$ **dá určitou námahu, ta se ovšem vyplatí:**

**Pro zadané body** $[x_i, y_i]$ **nazveme podíly**

$$y[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \;\; i = 0, 1, \ldots n - 1$$

**poměrnými diferencemi prvního řádu (označení naznačuje, že hodnoty** $y_i$ **jsou funkčními hodnotami funkce** $y(x)$**, jejíž aproximaci hledáme).**

**Pomocí poměrných diferencí prvního řádu definujeme poměrné diference druhého řádu jako**

$$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{y[x_{i+1}, x_{i+2}] - y[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}, \;\; i = 0, 1, \dots, n-2$$

**a obecně poměrné diference k-tého řádu pro $k \leq n$ definujeme takto:**

$$y[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{y[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - y[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

**Pro $i = 0, \dots, (n-k)$. Pro hledané koeficienty $a_i$ platí $a_0 = y_0$, $a_1 = y[x_0, x_1]$, $a_2 = y[x_0, x_1, x_2]$, …, $a_n = y[x_0, x_1, \dots, x_n]$.**

**Příklad 2.2.** **Najděte interpolační polynom pro tytéž body jako v příkladu 2.1, tj. pro body**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -1 | 0 | 2 | 4 |
| $y_i$ | 2 | 4 | 3 | -1 |

.

**Při konstrukci daných diferencí je vhodné vytvořit tabulku, kde do prvního sloupce napíšeme hodnoty $x_i$, do druhého sloupce hodnoty $y_i$ (což jsou vlastně poměrné diference řádu 0), do třetího sloupce poměrné diference řádu 1, do čtvrtého sloupce poměrné diference řádu 2, atd. Dostaneme následující tabulku:**

| $x_i$ | $y_i$ | $y[x_i, x_{i+1}]$ | $y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ | $y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$ |
|---|---|---|---|---|
| **-1** | **2** | $\frac{4-2}{0-(-1)} = 2$ | $\frac{-0{,}5-2}{2-(-1)} = \frac{-5}{6}$ | $\frac{\frac{-3}{8}+\frac{5}{6}}{4-(-1)} = \frac{11}{120}$ |
| **0** | **4** | $\frac{3-4}{2-0} = -0{,}5$ | $\frac{-2-(-0{,}5)}{4-0} = \frac{-3}{8}$ | |
| **2** | **3** | $\frac{-1-3}{4-2} = -2$ | | |
| **4** | **-1** | | | |

**Při konstrukci tabulky platí, že v čitateli při výpočtu hodnot diference se nachází vždy rozdíl hodnot z předchozího sloupce (hodnota o řádek níž minus hodnota na stejném řádku), ve jmenovateli je rozdíl dvou $x$-ových souřadnic zadaných bodů (u dif. řádu jedna je to $x_{i+1} - x_i$ (rozdíl sousedních), u řádu 2 je**

**to $x_{i+2} - x_i$ (rozdíl $x$-ových souřadnic ob jedno místo), atd.).**

**Hledané koeficienty nacházíme v prvním řádku (počínaje $y_0$):**

$$P_3(x) = 2+2(x-(-1))-\frac{5}{6}(x-(-1))(x-0)+\frac{11}{120}(x-(-1))(x-0)(x-2).$$

**Srovnání Lagrangeova a Newtonova vzorce:** v příkladech 2.1 a 2.2 byl nalezen tentýž interpoleční polynom, pouze v jiném vyjádření (je možné ověřit roznásobením závorek a upravením obou polynomů na stejný tvar) – mimo jiné to plyne z toho, že interpolační polynom vždy existuje právě jeden (zadaných $(n+1)$ bodů jej určuje jednoznačně).

Je užitečné si všimnout, že Lagrangeův tvar je rychleji dosažen (okamžitě píšeme tvar polynomu, pouze s využitím zadaných bodů) – někdy proto použijeme právě tento.

Na druhé straně, Newtonův tvar je užitečný tehdy, pokud přidáme k již zadaným bodům další bod – tím se hodnoty pyramidy ve výpočtové tabulce nemění,

**pouze v každém sloupci přibude jedna hodnota, tj. k polynomu se po přidání nového bodu přičte jen jeden další člen, s koeficientem získaným na vrcholu doplněné pyramidy (pokud tedy máme na mysli, že pyramida je pootočena o devadesát stupňů, tudíž její vrchol se nachází v posledním sloupci tabulky).**

**Poznámka 2.2. B) Splajn.**

**Iterpolační polynom při více bodech nabývá jisté neblahé vlastnosti, že i když prochází zadanými body, mimo ně se příliš „rozkmitá“ (viz obrázek ve skriptech [1], str. 69). Proto např. už při deseti bodech se interpolační polynom mimo zadané body nehodí k aproximaci měřené funkce a musíme hledat jiné prostředky. Jednou z hojně využívaných metod, která má při větším počtu bodů lepší vlastnosti než interpolační polynom, je konstrukce tzv. splajnu.**

**Splajn je soustava polynomů nižšího stupně na různých intervalech, které na sebe navzájem navazují v zadaných bodech.**

- **Lineární splajn = soustava lineárních funkcí, kteé na sebe navazují v zadaných bodech (vlastně lomená čára spojující zadané body $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, …, $[x_n, y_n]$)[1].**

- **Kvadratický splajn = soustava kvadratických funkcí, které na sebe v zadaných bodech navazují jak funkční hodnotou, tak i první derivací[2].**

- **Kubický splajn = soustava kubických funkcí, které na sebe v zadaných bodech navazují jak funkční hodnotou, tak první a druhou derivací[3].**

[1] Tato lomená čára je – to dá rozum – určena jednoznačně.

[2] Přestože z návaznosti funkčních hodnot a prvních derivací vyvstává řada rovnic, výsledné koeficienty nejsou určeny jednoznačně a z hledaných $3n$ neznámých koeficientů lze jeden zvolit.

[3] Přestože z návaznosti funkčních hodnot a prvních a druhých derivací vyvstává řada rovnic, výsledné

**V praxi se často používá kubický splajn, protože**

- **lineární splajn má příliš ostré hroty – funkce může mezi danými body příliš oscilovat, také nejsou k dispozici hodnoty derivací v zadaných bodech (díky „hrotům“ v zadaných bodech).**

- **kvadratický splajn má již lepší vlastnosti, např. existuje vždy jeho derivace, ovšem negativní vlastností je setrvačnost: každé dva sousední body (pro $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$) jsou v grafu spojeny parabolou – tato parabola příliš „přestřelí“ bod $[x_i, y_i]$, než získá ten správný kurs směrem k bodu $[x_{i+1}, y_{i+1}]$.**

---

koeficienty nejsou určeny jednoznačně a z hledaných $4n$ neznámých koeficientů lze dva zvolit.

**Kubický splajn má zkrátka ideální aproximační vlastnosti: hledáme takovou aproximaci, která spojuje zadané body, prokládá je funkcemi pokud možno jednoduchými (ale proložení je přesnější než proložení parabolami), v každém bodě existuje derivace (první i druhá) výsledné aproximace.**

**Přirozený kubický splajn:**

- **Soustava kubických funkcí typu** $s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$ **na intervalech** $\langle x_i; x_{i+1}\rangle$**, které na sebe navazují v krajních bodech.**
- **Sousední kubické funkce na sebe navazují první i druhou derivací.**
- **Platí navíc** $s_0''(x_0) = 0$**,** $s_{n-1}''(x_n) = 0$**.**

Takto definovaný kubický splajn nalezne soustavu funkcí, jejichž graf kopíruje trajektorii, do které by se vytvarovalo elastické pravítko, kdybychom je upevnili („jako dvěma hřebíčky, z každé strany jeden“) ve všech zadaných bodech – mimo tyto body by se elasticky pružně vytvarovalo do trajektorie přirozeného kubického splajnu.

**Příklad 2.3.** **Najděte přirozený kubický splajn pro zadané body**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **-1** | **0** | **2** | **4** |
| $y_i$ | **2** | **4** | **3** | **-1** |

.

**Řešení: hledáme následující soustavu polynomů:**

$$\begin{aligned} s_0(x) &= a_0 + b_0(x+1) + c_0(x+1)^2 + d_0(x+1)^3 \text{ **pro** } x \in \langle -1; 0\rangle; \\ s_1(x) &= a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 \text{ **pro** } x \in \langle 0; 2\rangle; \\ s_2(x) &= a_2 + b_2(x-2) + c_2(x-2)^2 + d_2(x-2)^3 \text{ **pro** } x \in \langle 2; 4\rangle; \end{aligned}$$

**Všimněte si, že na intervalu $\langle x_i; x_{i+1}\rangle$ je polynom vyjádřen v mocninách závorky $(x - x_i)$.**

**Jedná se zde o dvanáct neznámých koeficientů, které máme najít. Najdeme je dosazením do požadovaných podmínek pro soustavu těchto kubických funkcí:**

**1. Polynomy prochází zadanými body:**

$$s_0(-1) = 2 \;\Rightarrow\; a_0 = 2; \tag{1}$$

$$s_1(0) = 4 \;\Rightarrow\; a_1 = 4; \tag{2}$$

$$s_2(2) = 3 \;\Rightarrow\; a_2 = 3; \tag{3}$$

$$s_2(4) = -1 \;\Rightarrow\; 3 + 2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = -1. \tag{4}$$

**2. Polynomy na sebe navazují:**

$$s_0(0) = s_1(0) \;\Rightarrow\; 2 + b_0 + c_0 + d_0 = 4; \tag{5}$$

$$s_1(2) = s_2(2) \;\Rightarrow\; 4 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 = 3. \tag{6}$$

**3. První derivace polynomů musí navazovat:**

$$s_0'(0) = s_1'(0) \;\Rightarrow\; b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1; \tag{7}$$

$$s_1'(2) = s_2'(2) \;\Rightarrow\; b_1 + 4c_1 + 12d_1 = b_2. \tag{8}$$

**4. Druhé derivace polynomů musí navazovat:**

$$s_0''(0) = s_1''(0) \;\Rightarrow\; 2c_0 + 6d_0 = 2c_1; \tag{9}$$

$$s_1''(2) = s_2''(2) \;\Rightarrow\; 2c_1 + 12d_1 = 2c_2. \tag{10}$$

5. **Máme deset rovnic o dvanácti neznámých, ještě je potřeba volit například podmínky pro přirozený kubický splajn, aby bylo řešení jednoznačně:**

$$s_0''(-1) = 0 \;\Rightarrow\; 2c_0 = 0; \tag{11}$$

$$s_2''(4) = 0 \;\Rightarrow\; 2c_2 + 12d_2 = 0. \tag{12}$$

**První tři neznámé jsou hned určeny, ale dalších devět není tak zřejmé, jak získat (obecně musíme ještě provést Gaussovu eliminaci pro devět rovnic o devíti neznámých). Místo dosazování přímo do podmínek lze drobnými úpravami a označením vnést do řešení jistý systém, takže lze postupovat následujícím způsobem:**

**I.** **Určíme** $a_i = y_i$ **pro** $i = 0, 1, \ldots, n-1$**; dále volíme** $c_0 = 0$**,** $c_n = 0$ **(**$c_n$ **je fiktivní proměnná, protože polynom** $s_n(x)$ **nemáme už konstruovat – ale toto označení nám dovoluje zapsat systém rovnic v bodě II jediným vzorcem).**

**II.** **Vypočteme** $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ **jako řešení systému rovnic**

$$h_i c_i + 2(h_{i+1} + h_i)c_{i+1} + h_{i+1}c_{i+2} = 3\left(\frac{\Delta y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{\Delta y_i}{h_i}\right)$$

**pro** $i = 0, 1, \ldots, n-1$ **(označení:** $h_i = x_{i+1} - x_i$**,** $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$**).**

**III. Vypočteme $b_i$, $d_i$ pro $i = 0, 1, \ldots, n-1$ dosazením do vzorců**

$$b_i = \frac{\Delta y_i}{h_i} - \frac{h_i}{3} \cdot (c_{i+1} + 2c_i); \quad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}.$$

**V našem příkladu je pak řešení:**

$$
\begin{aligned}
s_0(x) &= 2 + \frac{105}{44}(x+1) - \frac{17}{44}(x+1)^3 \ \textbf{pro } x \in \langle -1; 0 \rangle; \\
s_1(x) &= 4 + \frac{27}{22}x - \frac{51}{44}x^2 + \frac{13}{88}x^3 \ \textbf{pro } x \in \langle 0; 2 \rangle; \\
s_2(x) &= 3 - \frac{18}{11}(x-2) - \frac{3}{11}(x-2)^2 + \frac{1}{22}(x-2)^3 \ \textbf{pro } x \in \langle 2; 4 \rangle;
\end{aligned}
$$

**Nebo ještě lépe, při zaokrouhlení výsledku na tři desetinná místa:**

$$
\begin{aligned}
s_0(x) &= 2 + 2{,}3864(x+1) - 0{,}3864(x+1)^3 \ \textbf{pro } x \in \langle -1; 0 \rangle; \\
s_1(x) &= 4 + 1{,}2273x - 1{,}1591x^2 + 0{,}14773x^3 \ \textbf{pro } x \in \langle 0; 2 \rangle; \\
s_2(x) &= 3 - 1{,}6364(x-2) - 0{,}2727(x-2)^2 + 0{,}0454(x-2)^3 \ \textbf{pro } x \in
\end{aligned}
$$

V rámci procvičení tohoto tématu můžete vypočíst ze skript [1], str. 82,83, příklady 6.1, 6.3 a 6.5.

# Literatura

[1] Fajmon, B., Růžičková, I.: Matematika 3. Skriptum FEKT VUT v elektronické formě, Brno 2003. Počet stran 257 (identifikační číslo v informačním systému VUT: MAT103). http://www.rozhovor.cz/souvislosti/matematika3.pdf.