1 Nelineární rovnice

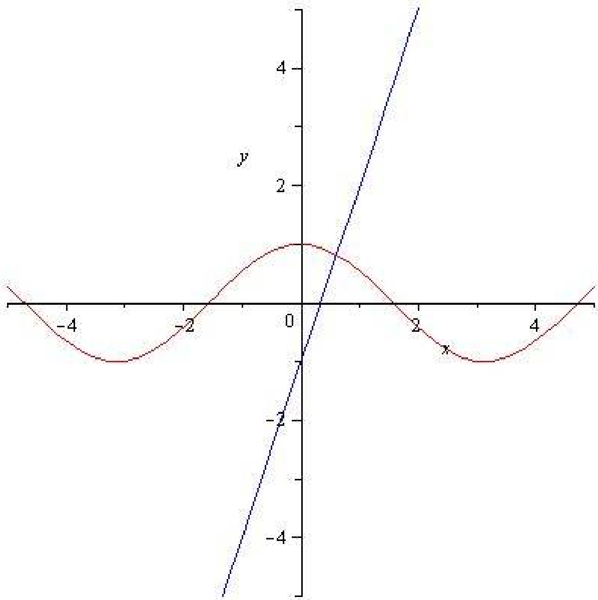
Břetislav Fajmon, UMAT FEKT, VUT Brno

Poznámka 1.1. A) první část hodiny (cca 50 minut): představení všech tří metod při řešení jednoho příkladu.

Na jiných příkladech je téma podrobně zpracováno ve skriptech [1], kapitola 5. Přitom toto téma nebude prezentováno na přednášce – kromě tohoto slajdu bude z kapitoly 5 probrána příští týden ještě metoda regula falsi.

Příklad 1.1. Najděte reálná řešení rovnice $3x - \cos x - 1 = 0$.

- Jsme schopni z této rovnice vyjádřit neznámou x?
- Máte někdo nějaký návrh, jak ji řešit?
- Začněme kreslením grafu funkce: je možné z obrázku odhadnout, kde přibližně se nachází řešení rovnice?



- Kolik řešení naší rovnice existuje?

- Kde přesně dané řešení vyčteme z obrázku?

- Na jakém intervalu přibližně řešení leží?

- Tak to bylo grafické určení přibližné polohy řešení. Pokud by nás toto řešení zajímalo řekněme aspoň na tři desetinná místa přesně, museli bychom užít nějakou zpřesňující další metodu. Těmito zpřesňujícími metodami (tzv. **numerické metody**) se nyní budeme zabývat, a uvedeme si tři metody, které naleznou řešení rovnice $f(x) = 0$ na intervalu $\langle a; b\rangle$ v situaci, kdy už víme, že toto řešení se na daném intervalu nachází. Předpokládejme navíc ještě jednu věc, která je u všech rozumných funkcí splněna, že totiž funkce $f(x)$ je spojitá na $\langle a; b\rangle$, a že platí

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

  Víte, co říká tato poslední uvedená podmínka?

- Zaručuje podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$ existenci řešení rovnice $f(x) = 0$ na intervalu $\langle a; b\rangle$?

Metoda 1: půlení intervalu

Za uvedených předpokladů (f je spojitá na $\langle a; b\rangle$ a $f(a)\cdot f(b) < 0$ a řešení na daném intervalu existuje jediné) metoda půlení intervalu najde dané řešení vždy: rozpulme interval $\langle a; b\rangle$: označme jeho střed $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Pokud $f(x_0) = 0$, našli jsme řešení – jinak vybereme ten z intervalů $\langle a; x_0\rangle$, $\langle x_0; b\rangle$, který obsahuje řešení naší rovnice, a označme jej $\langle a_1; b_1\rangle$ (podle podmínky, která platila už i u intervalu původního: $f(a_1)\cdot f(b_1) < 0$). Opět najdeme střed tohoto intervalu. podle vzorce

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

atd. POZOR: pracujeme opět s původní rovnicí $3x - 1 - \cos x = 0$, na pravé straně rovnice je hodnota 0 – metoda je totiž založena na porovnávání hodnoty jediné funkce f s hodnotou nula.

Je vidět, že po konečném počtu kroků dospějeme k hodnotě x_k, že $f(x_k) = 0$ či $f(x_k)$ je dostatečně blízké nule, takže prohlásíme x_k za přibližné řešení.

Implementace metody v prostředí MATLAB: Vytvoříme v textovém editoru soubor s názvem $f1.m$, do nějž zadáme funkci f:

soubor f1.m

```
% zadání funkce, se kterou chceme pracovat
% (jedná se o levou stranu rovnice f(x)=0)
function y=f1(x)
y=3*x-cos(x)-1;
```

Dále vytvoříme v prostředí MATLAB soubor *f1puleni.m*, do nějž zadáme algoritmus metody půlení intervalu:

soubor pu-leni.m

```
a = input('Zadej dolní mez intervalu: ');
b = input('Zadej horní mez intervalu: ');
fid = fopen('kroky.txt','w');
fprintf(fid,'   a_k  ');fprintf(fid,'     b_k   ');
fprintf(fid,'     x_k  \n');
eps = input('Zadej požadovanou přesnost: ');

while abs(b-a)>eps
        x = (a+b)/2;
        fprintf(fid,'  %-6.6f  ',a);fprintf(fid,'  %-6.6f  ',b);
```

```
        fprintf(fid,'  %-6.6f  \n',x);
          % vybereme vhodnou polovinu intervalu
          if f1(a)*f1(x)<0
              % zmenime krajni body intervalu
              b=x
          else
              a=x
          end
end
          % vypiseme vysledek
          fprintf('Hledané řešení  je %6.9f', x);
          fclose(fid); clear ans
```

Pokud programu zadáme inteval $\langle 0;1\rangle$ a zadáme přesnost $\varepsilon = 0{,}001$, program do souboru *kroky.txt* napíše následující zápis provádění algoritmu:

soubor kroky

a_k	b_k	x_k	f(a_k)	f(x_k)	f(b_k)
0.000000	1.000000	0.500000	-	-	+
0.500000	1.000000	0.750000	-	+	+
0.500000	0.750000	0.625000	-	+	+
0.500000	0.625000	0.562500	-	-	+
0.562500	0.625000	0.593750	-	-	+
0.593750	0.625000	0.609375	-	+	+
0.593750	0.609375	0.601563	-	-	+
0.601563	0.609375	0.605469	-	-	+
0.605469	0.609375	0.607422	-	+	+
0.605469	0.607422	0.606445			

Metoda 2: prostá iterace

Věnujme se nyní představení druhé metody řešení rovnice $f(x) = 0$. Přípravným krokem této metody je převedení rovnice do tvaru $x = g(x)$ tak, aby se nezměnilo řešení této rovnice. To lze mnoha způsoby: například u naší ilustrační rovnice lze $3x - 1 - \cos x = 0$ upravit na tvar $x = \frac{1+\cos x}{3}$.

No a ve druhé fázi při volbě libovolného x_0 z intervalu $\langle a; b\rangle$ se toto x_0 dosadí do funkce g, vypočte se $x_1 := g(x_0)$, takto vypočtené x_1 se opět dosadí do funkce g, vypočte se $x_2 := g(x_1)$, atd.

$$x_{k+1} := g(x_k).$$

Ukazuje se, že NE VŽDY, ALE OBČAS (tj. při vhodné volbě počátečního bodu x_0 a při vhodném tvaru funkce $g(x)$) se skutečně uvedeným procesem více a více blížíme k hledanému řešení).

Implementace metody v prostředí MATLAB: Vytvoříme v textovém editoru soubor s názvem $g1.m$, do nějž zadáme upravenou funkci $g(x)$ z našeho příkladu. Obsahem souboru bude text:

soubor g1.m

```
% zadání funkce, se kterou chceme pracovat
% (jedná se o pravou stranu rovnice x=g(x))
function y=g1(x)
y=(1+cos(x))/3;
```

Dále vytvoříme v prostředí MATLAB soubor *g1iterace.m*, do nějž zadáme algoritmus metody půlení intervalu:

soubor iterace

```
presnost=0.001; z0=0;
fid = fopen('kroky.txt','w');
fprintf(fid,'    x_k  ');fprintf(fid,'     g(x_k)  \n');

for n=1:20
    fprintf(fid,'  %-6.7f  ',z0);fprintf(fid,'  %-6.7f  \n',g1(z0));
    z1=g1(z0);% klicovy vzorec metody
    if abs(z1-z0)<presnost
        break;
    end
    z0=z1;
end

fprintf(fid,'  %-6.7f  ',z1);fprintf(fid,'  %-6.7f  \n',g1(z1));
% do souboru se vypise posledni vypoctene z1
fclose(fid); clear ans
% zavreni souboru kroky.txt
```

Spuštěním souboru *g1iterace.m* v prostředí MATLAB se nyní vyzvedne tvar funkce $g(x)$ ze souboru *g1.m*, a pro počáteční bod $z0 = 0$ se provede algoritmus prosté iterace. Program má zadánu tutéž přesnost – rozdíl $\varepsilon = 0{,}001$ mezi dvěma následnými hodnotami vede k ukončení algoritmu. Program *g1iterace.m* do souboru *kroky.txt* napíše následující zápis provádění algoritmu:

soubor kroky

```
      x_k          g(x_k)
  0.0000000      0.6666667
  0.6666667      0.5952958
  0.5952958      0.6093276
  0.6093276      0.6066777
  0.6066777      0.6071822
  0.6071822      0.6070863
```

Slabinou metody je to, že metoda nemusí řešení najít – posloupnost konstruovaných bodů může směřovat k nekonečnu, či probíhat v cyklu, který nesměřuje k žádné konkrétní hodnotě.

Metoda 3: Newtonova (metoda tečen)

Poslední, třetí metoda, se kterou se při řešení úlohy seznámíme, se týká zpět rovnice $f(x) = 0$ v takovém tvaru, kdy na pravé straně rovnice je nula (pokud by tam nula nebyla, museli bychom ji tam zajistit převedením všech členů na jednu stranu – je to nutná součást metody, stejně jako u metody bisekce). Vyjdeme nyní dále (podobně jako u metody prosté iterace) z jistého bodu x_0 a konstruujeme posloupnost bodů podle vzorce

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Geometrický význam této konstrukce je tento: box x_{k+1} získáme jako průsečík osy x a tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_k, f(x_k)]$. Za určitých okolností může dojít k tomu, že metoda nebude konvergovat, protože průsečík tečny ke grafu funkce f může „utéci“ hodně daleko na ose x, takže už řešení nenajde, nebo dokonce tento průsečík tečny a osy x nemusí existovat, pokud x_k je bodem lokálního extrému. V mnoha případech ovšem Newtonova metoda vede k cíli a používá se v praxi nejčastěji z numerických metod, které hledají řešení rovnice $f(x) = 0$.

Implementace metody v prostředí MATLAB: Kromě funkce f, kterou jsme zadali do souboru $f1.m$ (stejný soubor jako u metody půlení intervalu) budeme ještě zadávat derivaci této funkce do souboru $f11der.m$:

soubor f11der

```
% zde zadáme derivaci funkce f'(x)
% (Newtonova metoda pracuje s touto funkcí derivace)
function y=f1der(x)
y=3+sin(x);
```

Dále vytvoříme v prostředí MATLAB soubor $f1newton.m$, který bude provádět algoritmus Newtonovy metody:

soubor newton

```
presnost=0.001; z0=0;
fid = fopen('kroky.txt','w');
fprintf(fid,'    x_k   ');fprintf(fid,'     f(x_k)  \n');

for n=1:20
    fprintf(fid,'  %-6.7f   ',z0);fprintf(fid,'  %-6.7f  \n',f1(z0));
    z1=z0-f1(z0)/f1der(z0); % hlavní vzorec metody
    if abs(z1-z0)<presnost
        break
    end
    z0=z1;
end

fprintf(fid,'  %-6.7f   ',z1);fprintf(fid,'  %-6.7f  \n',f1(z1));
% do souboru se vypise posledni vypoctene z1
fclose(fid); clear ans
% zavreni souboru kroky.txt
```

No a po spuštění programu $f1newton$ v prostředí MATLAB se nyní podíváme na výsledek zapsaný do souboru kroky.txt:

soubor kroky

```
   x_k          f(x_k)
0.0000000     -2.0000000
0.6666667      0.2141127
0.6074929      0.0013969
0.6071017      0.0000001
```

Ze souboru *kroky.txt* je vidět, že už po čtyřech krocích metody pro počáteční bod $x_0 = 0$ jsme dospěli k hodnotě $\hat{x} \doteq 0{,}6071017$ (metoda prosté iterace pro tuto přesnost potřebovala kroků šest), která po dosazení do levé strany rovnice dává prakticky nulu, tj. je vypočtena s velkou přesností. Pokud snížíme hodnotu ε pro ukončení algoritmu, dostaneme po šesti krocích neměnnost už na prvních deseti desetinných místech ($\hat{x} \doteq 0{,}6071016481$, kdežto metoda půlení intervalu by téže přesnosti dosáhla po třiceti krocích). Je vidět, že pokud zvolíme x_0 tak, že metoda pro tuto volbu konverguje, je dosaženo velké přesnosti nejrychleji ze všech tří probraných metod.

Poznámka 1.2. A) druhá část hodiny (cca 50 minut): otázka více řešení jedné rovnice, kdy metody selhávají, procvičování uvedených tří metod.

Až dosud jsme se zabývali hledáním řešení rovnice $f(x) = 0$ (respektive rovnice $x = g(x)$) za toho předpokladu, že na zadaném intervalu $\langle a; b\rangle$ řešení existuje. Co dělat v situaci, kdy existuje více řešení dané rovnice? Jak detekovat intevaly rozumné délky, z nichž na každém existuje jedno řešení dané rovnice? Jak všechna tato řešení najít metodami, se kterými jsme se seznámili? Těmito otázkami se budeme zabývat ve zvývajících příkladech tohoto cvičení.

Příklad 1.2. Najděte všechna řešení rovnice $x^3 - 12x + \sin x + 1 = 0$ v oboru reálných čísel.

- Jak lze najít intervaly nějaké rozumné délky (např. délky jedné jednotky na vodorovné ose), z nichž každý obsahuje řešení rovnice $f(x) = 0$, aniž bychom kreslili graf funkce $f(x)$?

separace řešení

x_k	f(x_k)
-10.00000	-878.45598
-9.00000	-620.41212
-8.00000	-415.98936
-7.00000	-258.65699
-6.00000	-142.72058
-5.00000	-63.04108
-4.00000	-14.24320
-3.00000	9.85888
-2.00000	16.09070
-1.00000	11.15853
0.00000	1.00000
1.00000	-9.15853
2.00000	-14.09070
3.00000	-7.85888
4.00000	16.24320
5.00000	65.04108

Řešení: Z vypočtených funkčních hodnot je vidět, že funkční hodnoty v bodech x_k jsou neustále záporné, až funkční hodnota $f(-3)$ je kladná; pokud funkce $f(x)$ je spojitá (což součet polynomu a funkce sinus je), tak na intervalu $\langle -4; -3 \rangle$ musí podle našich předchozích úvah existovat nějaké řešení (f je spojitá na intervalu $\langle -4; -3 \rangle$ a v krajních bodech tohoto intervalu mají její hodnoty rozdílná znaménka). Tímto způsobem se detekuje, že druhé řešení rovnice leží v intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ a třetí řešení v intervalu $\langle 3; 4 \rangle$. Je také vidět, že interval $\langle -10; 10 \rangle$ pro hledání řešení jsme zvolili rozumně, protože výraz x^3 ve funkci f zdaleka převáží hodnoty všech ostatních členů a hodnoty funkce f pro x vzdalující se od počátku klesají do minus nekonečna, respektive rostou do nekonečna, čili žádné další řešení této rovnice už neexistuje.

Uvedená metoda separace řešení funguje rozumně dobře, s těmito připomínkami:

1. Náš jednoduchý test $f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) < 0$ nemusí znamenat, že na intervalu $\langle x_k; x_{k+1} \rangle$ u spojité funkce f existuje řešení jediné – pokud je funkce na tomto intervalu dostatečně proměnlivá, např. není monotonní, je možné, že reálných řešení na daném intervalu existuje více než jedno.

2. Pokud $f(x)$ je například polynomem, který má v bodě x_0 kořen se sudou násobností, metoda separace neodhalí změnu znaménka, protože k ní nedojde – graf funkce $f(x)$ se pouze „odrazí" od osy x na stejnou stranu jako předchozí znaménka funkčních hodnot.

3. Další situací rovnice $f(x) = 0$, kde pomocný postup separace selhává, je rovnice s komplexním řešením – metoda výpočtu znamének funkčních hodnot vlastně funguje jen pro reálné řešení naší rovnice. Newtonova metoda se užívá i pro hledání komplexních kořenů polynomu, musíme ovšem vyjít z bodu x_0, který má nenulovou imaginární část.

Příklad 1.3. Metodou prosté iterace najděte všechna řešení rovnice

$$2\ln x - x + 2 = 0.$$

- Najděte počet řešení a intervaly, které řešení obsahují. Můžete postupovat graficky či metodou separace proměnných.
- Najděte první řešení metodou prosté iterace.
- Najděte druhé řešení metodou prosté iterace.

Řešení: Pro funkci $g(x) = 2+2\ln x$ nám pro jakýkoli povolený počáteční bod x_0 iterační proces dospěje k již nalezenému $x_2 = 5{,}3567$. Je vidět, že k nalezení druhého řešení nepomohou různé volby počátečního bodu x_0, nýbrž změna ve tvaru funkce $g(x)$. Pokud bychom například ze vztahu $\ln x = \frac{x}{2}-1$ vyjádřili proměnnou x z argumentu funkce $\ln x$, dostaneme

$$x = e^{\frac{x}{2}-1} \Longrightarrow g(x) = e^{\frac{x}{2}-1}.$$

Nyní se iterační proces např. pro $x_0 = 1$ po několika krocích ustálí na hodnotě 0,4639, což je hledané druhé řešení s přesností na čtyři desetinná místa.

Příklad 1.4. Newtonovou metodou (metodou tečen) najděte všechna řešení rovnice

$$\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} = 0.$$

- Určete počet řešení a intervaly, které obsahují vždy jen jedno řešení – na základě grafického názoru či pomocí separace proměnných.
- Určete všechna řešení Newtonovou metodou

Řešení: $x_1 = 0$ lze uhodnout, řešení x_2, x_3 jsou symetrická vzhledem k počátku – stačí tedy určit x_2, a x_3 pak dopočítat jen změnou znaménka. Pokud převedeme rovnici zpět do tvaru $\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} = 0$ a pro tento tvar užijeme Newtonovu metodu např. pro $x_0 = 1$ (studenti si obvykle ve druhém ročníku už nepamatují z prvního ročníku, že derivací funkce $\operatorname{arctg} x$ dostaneme $\frac{1}{1+x^2}$), tak Newtonova metoda zhavaruje, protože hned v prvním kroku dochází k dělení nulou (první derivace funkce f v bodě 1 je rovna nule)! Pro volbu např. $x_0 = 2$ dostaneme asi po čtyřech krocích řešení $x \doteq 2{,}3311$ s přesností na čtyři desetinná místa, a tedy řešení symetrické vzhledem k počátku je $x \doteq -2{,}3311$.

Vzorec metody v našem příkladu je dobré zjednodušit, tj. upravit složený zlomek na tvar s jedinou zlomkovou čárou, dokonce možná i převést odčítání zlomku na jednoho společného jmenovatele, aby se odstranily chyby způsobené dosazováním do příliš rozvinutého a neupraveného vzorce.

V rámci přípravy na malou písemku ve 2. týdnu semestru (= příští týden) můžete vypočíst ze skript [1], str. 59, příklady 5.4 a 5.5.

Literatura

[1] Fajmon, B., Růžičková, I.: Matematika 3. Skriptum FEKT VUT v elektronické formě, Brno 2003. Počet stran 257 (identifikační číslo v informačním systému VUT: MAT103). `http://www.rozhovor.cz/souvislosti/matematika3.pdf`.

Nyní končí povinná část cvičení – závěrem ještě úkoly k zamyšlení pro rychlejší či hloubavější studenty:

Příklad 1.5. Určete vzdálenost bodu $[1; 0]$ od nejbližšího vrcholu paraboly $y = x^2$ s přesností na tři desetinná místa (nejvýhodnější je zde pro rychlou konvergenci užít Newtonovu metodu).

Příklad 1.6. Pomocí Newtonovy metody realizujte operaci dělení ($=$ výpočtu hodnoty $\frac{1}{a}$ pro zadanou hodnotu a) – užijte přitom pouze operace sčítání, odčítání a násobení. Klíčem k úloze je najít tu správnou rovnici, kterou dále řešíme numerickou metodou.

Příklad 1.7. Vypočtěte $\sqrt{a}$ pro kladné reálné číslo a, aniž byste provedli odmocnění – užijte pouze operace sčítání, odčítání, násobení a dělení. Klíčem k úloze je najít tu správnou rovnici, kterou dále řešíme Newtonovou metodou.

Doplnění slajdů 01nelinearni-rovnice.pdf o řešení posledních tří úloh:

Příklad 1.5. Určete vzdálenost bodu $[1;0]$ od nejbližšího vrcholu paraboly $y = x^2$ s přesností na tři desetinná místa (nejvýhodnější je zde pro rychlou konvergenci užít Newtonovu metodu).

Řešení: Pro souřadnici x nejbližšího bodu na parabole musí platit, že funkce vzdálenosti

$$d(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-0)^2}$$

v tomto bodu má extrém. Abychom nemuseli počítat s odmocninou, uvažuje druhou mocninu vzdálenosti:

$$g(x) = d^2(x) = (x-1)^2 + x^4.$$

Nyní pro hledání extrému využijeme rovnice $g'(x) = 0$ (v bodě lokálního extrému funkce je její první derivace nulová), tedy Newtonovou metodu řešíme rovnici $4x^3 + 2x - 2 = 0$. Pomocná separace odhaluje, že reálné řešení existuje pravděpodobně jen jedno, a to na intervalu $\langle 0; 1\rangle$, což je přesně řešení, co nás zajímá (další dvě řešení této rovnice budou zřejmě komplexní). Pro $f(x) = 4x^3 + 2x - 2$ tedy spustíme Newtonovu metodu pro např. $x_0 = 1$, po třech krocích a zaokrouhlení na dvě desetinná místa dostaneme $\hat{x} \doteq 0{,}59$. Pokud bychom chtěli ustálenost desetinného průběhu pro větší počet desetinných míst, dostaneme 0,5897546, což zaokrouhleno na tři desetinná místa dá stejně opět hodnotu 0,59.

Příklad 1.6. Pomocí Newtonovy metody realizujte operaci dělení (= výpočtu hodnoty $\frac{1}{a}$ pro zadanou hodnotu a) – užijte přitom pouze operace sčítání, odčítání a násobení. Klíčem k úloze je najít tu správnou rovnici, kterou dále řešíme numerickou metodou.

První nápověda: Klíčovým momentem úlohy je sestavit rovnici $\frac{1}{x} - a = 0$, kde a je zadaná konstanta, jejíž převrácenou hodnotu $\frac{1}{a}$ chceme spočítat. Užijme Newtonovu metodu: dosazením funkce $f(x) = \frac{1}{x} - a$ do vzorce metody a úpravou dostaneme

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\frac{1}{x_k} - a}{\frac{-1}{x_k^2}} = x_k + \frac{\frac{1-ax_k}{x_k}}{\frac{-1}{x_k^2}} = x_k + x_k - ax_k^2 = 2 \cdot x_k - a \cdot x_k^2.$$

Pro náš konkrétní příklad má tedy vzorec Newtonovy metody tvar

$$x_{k+1} = 2 \cdot x_k - a \cdot x_k^2.$$

Dejme tomu, že a je kladné číslo (případné minus do dělení brát nemusíme), například $a = 7$. Spočtěme nyní podle našeho vzorce, VE KTERÉM SE VYSKYTUJE POUZE SČÍTÁNÍ, ODČÍTÁNÍ A NÁSOBENÍ, hodnotu $\frac{1}{a} = \frac{1}{7}$: Pro volbu $x_0 = 0$ dostaneme $x_1 = -5$, $x_2 = -185$, $x_3 = -239945$, atd. zdá se, že celá posloupnost konstruovaných čísel směřuje k minus nekonečnu. Je tedy naše snažení zbytečné, máme sice vzorec pěkný, ale Newtonova metoda poněkud havaruje?

Konečné řešení: Analýzou vzorce lze dospět k tomu, že pokud $a \cdot x_k > 2$, tak x_{k+1} se dostane do záporných hodnot a „už se z nich nevyhrabe“, tj. x_{k+1}, x_{k+2}, atd. zůstávají dále záporná, což jsou pro náš příklad hodnoty, které nevedou k očekávanému výsledku (předpokládáme a kladné, tj. $\frac{1}{a}$ musí být taky kladné). PŘEKVAPIVĚ nyní také platí, že pokud $a \cdot x_k < 2$, tak x_{k+1} bude kladné, a navíc také bude platit $a \cdot x_{k+1} < 2$ (protože x_{k+1} vzniklo odečtením kladné hodnoty od x_k). Dostáváme tedy následující postup: **Pokud zvolíme x_0 tak, že $a \cdot x_0 < 2$, Newtonova metoda najde převrácenou hodnotu $\frac{1}{a}$ bez použití dělení pro jakékoli kladné reálné číslo a.**

Zkusme tedy vypočíst převrácenou hodnotu čísla $a = 7$: Volbou $x_0 = 0{,}1$ máme zaručeno $7 \cdot x_0 < 2$, a tedy Newtonova metoda povede k cíli: po čtyřech krocích dostaneme $x_4 = 0{,}142857$, a pokud bychom chtěli větší přesnost výpočtu, pak uvidíme, že náš numerický proces konverguje k přesné hodnotě $\hat{x} = 0{,}\overline{142857}$.

Příklad 1.7. Vypočtěte $\sqrt{a}$ pro kladné reálné číslo a, aniž byste provedli odmocnění – užijte pouze operace sčítání, odčítání, násobení a dělení. Klíčem k úloze je najít tu správnou rovnici, kterou dále řešíme Newtonovou metodou.

Řešení: K cíli vede rovnice $x^2 - a = 0$ řešená Newtonovou metodou. Dosazením funkce $f(x) = x^2 - a$ do vzorce metody dostaneme

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{2x_k^2 - x_k^2 + a}{2x_k} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k}.$$

Pro náš konkrétní příklad má tedy vzorec Newtonovy metody tvar

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k}.$$

Je vidět, že při výpočtu budeme používat jen operace sčítání (odčítání), násobení a dělení. Vezměme si konkrétní číslo, například $a = 13$ – počítejme nyní odmocninu z tohoto čísla podle vytvořeného vzorce: Volbou například $x_0 = 1$ dostaneme po šesti krocích $x_6 = 3{,}6055513$, což je přesné řešení zaokrouhlené na daných sedm desetinných míst. **Uvedený algoritmus výpočtu odmocniny funguje pro jakékoli kladné reálné číslo a počáteční volbu $x_0 = 1$.**