1 INM + BMA3 ... slajdy – úvodem

Břetislav Fajmon, UMAT FEKT 2010

1.1 Tematická náplň předmětu Matematika 3

Nejprve mi dovolte prezentovat osnovu společně s několika obecnými otázkami.

Dvě části předmětu

Matematika 3 sestává ze dvou oblastí, které jsou tradičně považovány nikoli za základní, ale za nadstavbové kursy vysokoškolské matematiky:

- témata 1 až 6 ... numerické metody
- témata 7 až 12 ... pravděpodobnostní modely a statistika

Stejně jako já jsem psal tento úvod až poté, co mám s výukou předmětu několikaleté zkušenosti, i studentům doporučuji číst tento úvod až po absolvování celého kursu.

Učit numerické metody „roztroušeně“?

Například kniha [1] uvádí numerické metody „rozházené“:

- Newtonovu metodu (= metodu tečen) řešení jedné nelineární rovnice lze prezentovat jako příklad aplikace pojmu derivace okamžitě v kapitolce po prezentaci derivace.
- iterační metody řešení systémů lineárních rovnic (Jacobiho metoda, Gaussova-Seidelova metoda) lze prezentovat jako jednu z metod řešení těchto systémů okamžitě po prezentaci Gaussovy eliminační metody (jako příklad řešení těchto systémů pro velké množství rovnic, řádově tisíce až milióny rovnic).
- lichoběžníkovou metodu numerické integrace lze prezentovat jako jednu z metod výpočtu určitého integrálu hned po představení Newton-Leibnizovy formule a základních vzorců pro integraci.
- Eulerovu metodu řešení počáteční úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici 1.řádu lze prezentovat hned po uvedení metody variace konstanty při řešení lineární diferenciální rovnice 1.řádu.

Asi ne

Numerické metody užíváme, když klasické metody selhávají:

- Newtonovu metodu u jedné nelineární rovnice lze použít v tom případě, kdy klasické metody nejsou vůbec k dispozici.
- Iterační Jacobiho či Gaussovu-Seidelovu metodu lze užít v případě, kdy klasická Gaussova eliminace není optimálním přístupem k řešení systému lineárních rovnic.
- Numerické integrační metody jsou často nejrozumnějším nástrojem tehdy, když žádné klasické metody pro jisté určité integrály v podstatě neexistují (s výjimkou rozvoje integrované funkce v nekonečnou řadu).
- Numerické metody pro obyčejnou diferenciální rovnici 1.řádu musíme použít tehdy, když se nejedná o rovnici lineární a žádnou jednoduchou substitucí nezle tuto rovnici převést na rovnici lineární či rovnici, kterou dovedeme řešit klasickými metodami.

1. **Numerické řešení jedné nelineární rovnice.** I když se jedná o algoritmus, který je v programových výpočtových prostředích dobře naprogramován, u této úlohy lze dobře prezentovat základní aspekty numerické matematiky. Z organizačních důvodů není obsah tohoto tématu přednášen, ale látka je probírána pouze ve cvičení (aby nemuselo cvičení být rozvrhově v prvním týdnu semestru vázáno na přednášku). Je reálné probrat metodu bisekce (= půlení intervalu), metodu prosté iterace a Newtonovu metodu[1].

2. **Interpolační polynom a splajn.** Tato úloha zahrnuje přesnou aproximaci naměřených hodnot v případech, kde je tato přesnost potřeba – např. při modelování povrchu pneumatiky, kosti, atd. Měly by být prezentovány splajny řádu 1, 2 a 3 (společně s vysvětlením, proč se nejčastěji používá až splajn řádu 3 – viz [5]).

[1]Speciální algoritmy hledající kořeny polynomu nemohou být do této prezentace zahrnuty. Maximálně lze zahrnout metodu regula falsi, která zpřesňuje a ve většině případů zrychluje metodu bisekce.

3. **Metoda nejmenších čtverců.** Lineární trend, kvadratický trend, exponenciální trend, modifikovaný exponenciální trend (viz [6], str. 27-29), posunutý exponenciální trend (viz [6] pro alternativní metody k metodě nejmenších čtverců u posunutého exponenciálního trendu).

4. **Numerické derivování a integrace.** Zmínění základních vzorců jako příprava na metodu konečných diferencí. Numerické integrování – složená lichoběžníková metoda, složená Simpsonova metoda.

5. **Obyčejná diferenciální rovnice 1.řádu – klasické metody**[2]. Diferenciální rovnice jako model. Diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými. Lineární rovnice 1.řádu.

6. **Obyčejná diferenciální rovnice 1.řádu – numerické metody.** Eulerova metoda a její dvě základní modifikace. Systém diferenciálních rovnic prvního řádu (počáteční úloha) řešený Eulerovou metodou. Převod rovnice vyššího řádu na systém rovnic prvního řádu.

[2] Jedním z pravidel pro vytvoření tohoto kursu numerických metod bylo, že studenti se v jiném stylu setkají s matematickým problémem, který už dovedou některými klasickými analytickými metodami řešit. Proto tato osnova INM má toto téma navíc oproti osnově BMA3, kde byly diferenciální rovnice představeny už ve druhém semestru.

Jak použít software?

A co se týká času věnovaného softwarové podpoře? Studenti mají možnost poznat věc ze dvou stran – jednak by měli vidět metody naprogramované přesně podle vzorců, které se učí, jednak by měli být seznámeni s některým dokončeným softwarovým nástrojem. Jedním z výstupů tohoto seznámení je krutý fakt, že komerčně přístupná prostředí obyčejně nepoužívají algoritmy vyučované ve škole, ale nějaké jejich vylepšení či zobecnění. Ovšem mám za to, že programová podpora během vyučovací hodiny by měla pracovat přesně s tím algoritmickým postupem, se kterým se student seznamuje ve výuce.[3]

Tak studenti mohou použít počítač jako skutečnou pomoc – využijí počítač k výpočtu úlohy, jejíž algoritmus znají. Použitý software by měl být tedy vždy schopný uplatnit algoritmy vyučované v tomto předmětu.[4]

[3]K prezentaci numerických metod v tomto stylu se výborně hodí programové prostředí MATLAB, pokud je tento komerční produkt studentovi k dispozici.

[4]Pokud vyučující chce ukázat podstatu vestavěných příkazů a procedur daného softwarového produktu, doporučuji to udělat během přednášky. Co se týká cvičení, studenti by měli používat algoritmy přesně stejného tvaru, jaké se učí, aby nebyli zmateni programovým kódem.

Dále se předmět Matematika 3 věnuje v následujících šesti týdnech představení předmětu pravděpodobnostní modely. Při daném prostoru je obsah šesti týdnů víceméně dán: pět týdnů úvodu do teorie pravděpodobnostních modelů + jeden týden úvodu do statistiky a představení základních statistických pojmů. Z pěti týdnů pravděpodobnostních modelů je potřeba věnovat dva až tři týdny základním principům diskrétní a spojité pravděpodobnosti, a dále dva až tři týdny nejznámějším diskrétním a spojitým rozdělením pravděpodobnosti (je reálné zvládnout z diskrétních klasické, binomické a Poissonovo, ze spojitých rovnoměrné, exponenciální a normální rozdělení pravděpodobnosti) a některým jejich vzájemným rozdílům a vztahům. Při úvodu do statistiky je reálné zvládnout binomický (= znaménkový) statistický test jako příklad diskrétních úvah, a dále test střední hodnoty normálního rozdělení jako příklad spojitých úvah.[5]

[5] Kniha [7], i když má v názvu pouze slovo „statistika“, je výborným úvodem do kombinatoriky a pravděpodobnosti. Kniha [8] je dobrým doplněním z inženýrského prostředí.

7. **Základy kombinatoriky, klasická pravděpodobnost.** Opakování základních kombinatorických pojmů, jako je permutace, variace a kombinace, dále opakování či procvičení věty o úplné pravděpodobnosti a Bayesova vzorce pro podmíněnou pravděpodobnost.

8. **Pravděpodobnostní modely – diskrétní a spojitá náhodná veličina.** Základní pojmy popisu diskrétní i spojité náhodné veličiny + některé vlastnosti těchto pojmů: pojem náhodné veličiny jen intuitivně, dále pojmy: pravděpodobnostní funkce diskrétní veličiny, hustota spojité veličiny, distribuční funkce u diskrétní i spojité veličiny.

9. **Střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny.** Vzorce pro diskrétní i spojitý případ. Střední hodnota naměřených hodnot.

10. **Některé významné diskrétní veličiny.** Binomické a Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti.

11. **Některé významné spojité veličiny.** Exponenciální a normální rozdělení pravděpodobnosti. Distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení.

12. **Náhrada binomického rozdělení normálním rozdělením s korekcí. Úvod do statistických testů.** Statistický test střední hodnoty binomického rozdělení (= znaménkový test). Test střední hodnoty z normálního rozdělení. Test střední hodnoty průměru hodnot z normálního rozdělení.[6]

[6] V části „pravděpodobnostní modely“ je užitečným průvodcem text [9] – až na toto poslední téma, které dosud v této zbírce není zpracováno; pomocí jsou zde části kapitol 11, 13 a kapitola 14 textu [4]. Také je pravdou, že toto poslední přednášené téma už zpravidla není procvičeno. Pak obsahem cvičení této části předmětu může být uvedených sedm kapitol sbírky [9], každé cvičení vychází z jedné kapitoly textu.

Literatura

[1] Jordan, D.W., Smitth, P.: Mathematical Techniques. Oxford University Press 2008, 4th Edition.

[2] Kopka, H., Daly, P.W.: Latex – kompletní průvodce. Computer Press, Brno 2004. Pomocí této knihy byl vytvářen pdf soubor tohoto textu v programu Texlive.

[3] Petty, G.: Moderní vyučování – praktická příručka. Portál, Praha 1996, 1.vydání. 379 stran.

[4] Fajmon, B., Růžičková, I.: Matematika 3. Skriptum FEKT VUT v elektronické formě, Brno 2003. Počet stran 257 (identifikační číslo v informačním systému VUT: MAT103).
`http://www.rozhovor.cz/souvislosti/matematika3.pdf`.

[5] Chapra, S.C., Canale, R.P.: Numerical Methods for Engineers: With

Software and Programming Applications. 4th Edition, McGraw-Hill Publishers, New York 2002.

[6] Zapletal, J.: Úvod do analýzy ekonomických časových řad. Skriptum FEI VUT, nakl. PC-DIR, Brno 2000.

[7] Loftus, J., Loftus, E.: Essence of Statistics. 2nd Edition, Alfred Knopf Publishing, New York 1988.

[8] Montgomery, D.C., Runger, G.C.: Applied Statistics and Probability for Engineers. John Wiley and Sons, Inc., New York 2003.

[9] Hlavičková, I., Hliněná, D.: Matematika 3 – sbírka úloh z pravděpodobnosti. Elektronický text FEKT VUT, Brno 2007. K dispozici na adrese `http://www.umat.feec.vutbr.cz/~hlavicka/skripta/Sbirka_BMA3.pdf`